James Clerk Maxwell

MATERIA Y MOVIMIENTO

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL



James Clerk Maxwell

MATERIA Y MOVIMIENTO

TRADUCCIÓN
ARMANDO RODRÍGUEZ CONTRERAS

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL



Llega esta obra, a la comunidad estudiosa del
Instituto Politécnico Nacional, sin fines de lucro

Materia y Movimiento,
James Clerk Maxwell

ISBN 968-7001 24-0
Primera Edición

Impreso en México

PRESENTACIÓN

La actividad editorial desarrollada por el Instituto Politécnico Nacional, está encaminada al cumplimiento de objetivos fundamentales, tales como: el abatimiento del costo de los textos de apoyo para los planes de estudio de diversas carreras y disciplinas que se cursan en la institución, y el estímulo al profesorado para que su esfuerzo en el campo de la investigación técnica y científica y su experiencia en la cátedra, se plasmen en volúmenes que circulen entre el mayor número de estudiantes, docentes e investigadores.

En este contexto, iniciamos la publicación de una nueva colección de libros institucionales de carácter académico y costo reducido, que ofrece a los jóvenes estudiantes de los niveles medio superior y superior un acceso más directo hacia el conocimiento forjado en el esfuerzo y la dedicación de los docentes e investigadores del propio Instituto.

Este material bibliográfico especializado, se nutre en parte de trabajos originales de nuestra planta de profesores, lo que reviste la mayor importancia puesto que además de contemplar de forma particular los

aspectos pedagógicos específicos que desarrollan en su práctica diaria, permite incentivarlos y demuestra que en México contamos con la suficiencia científico-técnica que nos permitirá impulsar el desarrollo del país.

Este programa editorial pretende abarcar gran parte de las materias que integran el conjunto de planes de estudio del Instituto y reflejar en sus publicaciones la unificación de esfuerzos y voluntades que, sin lugar a dudas, repercutirán en una entusiasta aceptación estudiantil. Además, se inserta en el espíritu que ha distinguido siempre al Politécnico, de realizar la encomiable tarea de llevar el conocimiento científico y tecnológico a los sectores mayoritarios de nuestro país.

En un periodo histórico como el que vivimos, esta tarea reviste suma importancia, ya que se hace en extremo urgente extender la ayuda institucional para que nuestros educandos encuentren los apoyos que les faciliten el continuar sus estudios profesionales, tan necesarios para el desarrollo de la nación.

Este proyecto editorial seguramente marcará un nuevo rumbo en el proyecto académico del Instituto Politécnico Nacional, e impactará en la educación tecnológica y en el desarrollo integral del México del siglo XXI.

Diódoro Guerra Rodríguez

CONTENIDO

Capítulo I

INTRODUCCION

Capítulo II

SOBRE EL MOVIMIENTO

Capítulo III

SOBRE LA FUERZA

Capítulo IV

SOBRE LAS PROPIEDADES DEL CENTRO DE MASA DE UN SISTEMA MATERIAL

CAPÍTULO V

SOBRE EL TRABAJO Y LA ENERGIA

CAPÍTULO VI

RECAPITULACION

CAPÍTULO VII

EL PENDULO Y LA GRAVEDAD

CAPÍTULO VIII

GRAVITACION UNIVERSAL

CAPÍTULO IX

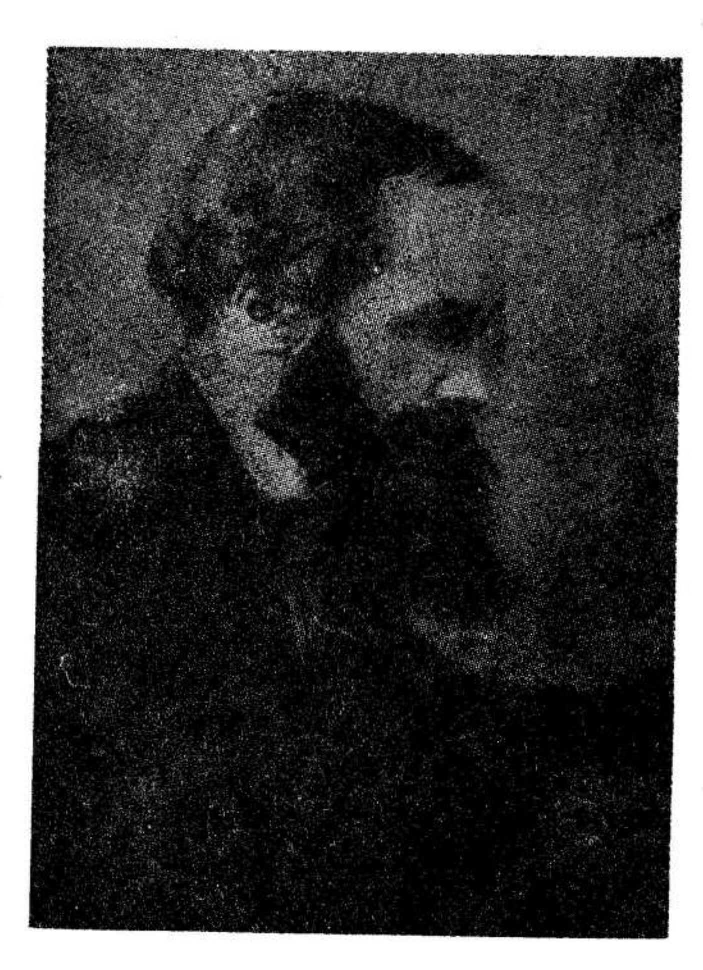
SOBRE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO DE UN SISTEMA CONECTADO

PREFACIO
(1877)

La Ciencia Física, que hasta fines del siglo dieciocho se había consagrado a la formación del concepto de fenómeno natural como el efecto de fuerzas que actúan entre uno y otro cuerpos, ha entrado de lleno en la siguiente etapa de progreso, aquella en la cual la energía de un sistema material se concibe como determinada por la configuración y el movimiento de tal sistema y las ideas de configuración, movimiento y fuerza son generalizadas hasta el máximo grado permitido por sus definiciones físicas.

El fundamento de la enseñanza del estudiante de Ciencia Física debe ser llegar a familiarizarse con estas ideas fundamentales e investigarlas en todos sus aspectos, así como habitualmente dirigir la corriente de pensamiento por los canales del estricto razonamiento dinámico.

Por lo tanto, la siguiente exposición de las doctrinas fundamentales de MATERIA Y MOVIMIENTO debe ser considerada como una introducción al estudio de la Ciencia Física en general.



J. Clerk Maxwell

ESBOZO BIOGRAFICO DE JAMES CLERK MAXWELL *

James Clerk Maxwell, el genial físico y matemático inglés, nació en Edimburgo el 13 de junio de 1831 (año del gran descubrimiento de la inducción electromagnética por el extraordinario experimentador inglés Michael Faraday), en el seno de una familia aristocrática escocesa: los Clerks de Penicuick. Murió a los 48 años de edad, en Cambridge, el 5 de noviembre de 1879, el mismo año en que nació otro físico que, en gran medida, continuó y culminó la obra y el pensamiento científicos de Maxwell: el genial alemán Albert Einstein.

James fue el último descendiente de la familia. Su padre que se interesaba poco por su profesión de abogado, dejó Edimburgo y construyó una casa campestre en la propiedad familiar de *Glenlair* en Kirkcudbrightshire y consagró la atención a la educación de su único hijo James. Al cumplir éste diez años, su padre decidió enviarlo a la Academia de Edimburgo en la que permaneció hasta la edad de 16 años (1847), cuando fue matriculado en la Universidad de Edimburgo en la cual estudió hasta 1850.

Maxwell desde pequeño se interesó por saber cómo funcionaban las cosas y a la edad de trece años

* **Preparado por Jorge Castro Briones.**

mostró su poder inquisitivo al construir, según sus propias palabras "un tetraedro, un dodecaedro y otros dos edros cuyos nombres no conocía".[1]

A la edad de 14 años, Maxwell descubrió un procedimiento para dibujar óvalos y otras figuras con exactitud matemática. Este procedimiento que generalmente se conoce con el título *On the Description of Oval Curves,* es su primer trabajo científico y fue presentado por el Profr. Forbes ante la Real Sociedad de Edimburgo. Un resumen de dicho trabajo, preparado por el Profr. Forbes (Maestro de Natural Philosophy en la mencionada Universidad), fue publicado en abril de 1846 en los *Proceedings* de la Real Sociedad de Edimburgo.[2]

Durante su estancia en la Universidad de Edimburgo, Maxwell escribió otros dos trabajos, el primero, cuando tenía diecisiete años, se llamaba *On the Theory of Rolling Curves* y fue presentado por el Rev. Kelland, su profesor de matemáticas en

[1] J. G. Crowther, *Hombres de Ciencia Británicos del Siglo XIX.* Espasa-Calpe Argentina, S. A., Buenos Aires, 1945, Col. Austral, Vol. 509, p. 159; Jay, E. Greene (recopilador) *100 Grandes Científicos,* ed. Diana, México, 1969, p. 268.

[2] El Profr. P. G. Tait condiscípulo y amigo de Maxwell menciona que en la época en que fue escrito el trabajo sobre *Ovalos,* Maxwell sólo sabía álgebra y un poco de geometría euclidiana (citado por W. D. Niven en *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell,* Dover Publications Inc. New York, 1965, p. X).

la Universidad, ante la Real Sociedad de Edimburgo y publicado en las *Transactions* de la mencionada sociedad. Y un año después, el trabajo titulado *On the Equilibrium of Elastic Solids,* en el cual fueron puestas las bases de su posterior descubrimiento de la doble refracción en líquidos viscosos en presencia de esfuerzos tangenciales. Este trabajo también fue publicado en las *Transactions* mencionadas.

En 1850, Maxwell pasó inicialmente a Peterhouse y, posteriormente al Trinity College de la Universidad de Cambridge. Durante su estancia de dos años como postgraduado en Trinity College, Maxwell se dedicó a la investigación matemática original, diseñó su famoso trompo de color y realizó trabajos sobre la sensación del color.

Durante esta misma época, Maxwell se dedicó también a leer cuidadosamente las *Experimental Researches on Electricity* de Michael Faraday y antes de abandonar Trinity College publicó, en 1856, en las *Transactions of Cambridge Philosophical Society,* su primer trabajo importante sobre electricidad denominado *On Faraday's Lines of Force.* En este trabajo, Maxwell realiza el intento de expresar en forma matemática los conceptos de Faraday y hace ver su compatibilidad con las fórmulas de Poisson y las de otros físicos.

Al terminar la Universidad de Cambridge en 1854, Maxwell permaneció allí para realizar labor pedagógica, ya que había sido elegido *fellow* del Tri-

nity College e incorporado al cuerpo docente del mismo.

De 1856 a 1860 fue profesor del Marischal College de Aberdeen (Escocia). Los principales resultados de su trabajo sobre la sensación del color, la composición de los colores y la ceguera cromática fueron asentados en su trabajo *On the Theory of Compound Colours, and the Relations of the Colour of the Spectrum* publicado en 1860 en las *Philosophical Transactions of Royal Society*, trabajo por el cual, Maxwell fue premiado, el 30 de noviembre de ese año, con la medalla Rumford de dicha Sociedad. [3]

En 1859, Maxwell publicó la importante investigación *On the Stability of the Motion of Saturn's Rings* (que ganó el Premio Adams para 1856 de la Universidad de Cambridge), en la cual demostró que tales anillos no son continuos (sólidos o líquidos) sino que son en sí un enjambre de meteoritos. Se considera que esta investigación (al tratar del comportamiento de una gran masa de partículas aisladas) despertó su interés por la teoría cinética de los gases, en la que se estudia el problema de la descripción del comportamiento de vastos conjuntos de moléculas en constantes choques. Su primera importante investigación en este campo está relacionada con una notable ley de distribución de las moléculas, de acuerdo con sus velocidades, que Maxwell estableció en 1859 y que fue publicada en el Philosophical Magazine en 1860 con el título *Illustrations of the Dynamical Theory of Gases.* Su segunda investigación importante se publicó en 1866 en las *Philosophical Transactions* con el título *On the Dynamical Theory of Gases.* Se considera que con estos trabajos Maxwell establece la Mecánica Estadística. [4]

Desde 1860 impartió las cátedras de Física y Astronomía en el King s College de la Universidad de Londres que dejó en 1865 (en que abandonó las labores docentes y retornó a su finca familiar de *Glenlair* en Kirkcudbrightshire), época que se distinguió por la fecunda labor científica de Maxwell. A esta época pertenecen sus otros dos trabajos fundamentales sobre electricidad: *On Physical Lines of Force* publicado en cuatro partes en 1861 y 1862 en el *Philosophical Magazine*, cuyo objetivo principal era proyectar un modelo que pudiera proporcionar una explicación mecánica de las interrelaciones y efectos de la electricidad y el magnetismo. En el transcurso de este trabajo, Maxwell llegó a una conclusión trascendental. Al confirmar experimentalmente los resultados de W. Weber y F. Kohlrausch de que la velocidad de una corriente eléctrica a través de un alambre es aproximadamente igual

[3] *Dictionary of National Biography*, Oxford University Press, Vol. XIII, art. Maxwell, James Clerk.

[4] J. G. Crowther, *ob. cit.*, pp. 187-188.

a la velocidad de la luz en el espacio vacío, Maxwell en forma audaz afirmó la identidad de los dos fenómenos. Al respecto Maxwell afirma que *Apenas podemos eludir la inferencia de que la luz consiste de oscilaciones transversales del mismo medio que es la causa de los fenómenos eléctricos y magnéticos.*[5] Y el otro trabajo titulado *On the Dynamical Theory of the Electromagnetic Field* publicado en 1865 en las *Philosophical Transactions of Royal Society,* en el cual Maxwell prescinde del modelo mecánico y describe las propiedades del campo electromagnético mediante veinte ecuaciones generales.[6]

Entre 1864 y 1870, Maxwell escribió una serie de artículos en el campo de la Estática y especialmente en la teoría de sistemas articulados, entre los que se destacan *On Reciprocal Figures and Diagrams of Forces* publicado en 1864 en London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science; *On the Equilibrium of a Spherical Envelope* publicado en 1867 en la Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics; *On Reciprocal Figures, Frames, and Diagrams of Forces* publicado en 1870 en las *Transactions of Royal Society of Edinburgh.* Por esta última importante memoria, Maxwell recibió el Premio Keith.[7]

En 1871, Maxwell es convencido por sus amigos para que retorne a la docencia y presente su candidatura a la Dirección del Laboratorio que piensa construir y organizar la Universidad de Cambridge. Maxwell gana el puesto sin oposición y queda al frente de la organización del Laboratorio, al que se le dio el nombre del científico inglés Henry Cavendish. El 25 de octubre de 1871, Maxwell, en su calidad de profesor de la cátedra Cavendish, pronunció su conferencia inaugural sobre física experimental que se considera como un gran documento de la historia de la ciencia.[8]

A Maxwell se le considera fundador (conjuntamente con M. Faraday) de la teoría del campo electromagnético y de la teoría electromagnética de la luz. Sus importantes investigaciones en el campo del electromagnetismo se vieron coronadas al publicar, en 1873, su famoso trabajo *A Treatise on Electricity and Magnestism.* Desarrollando la idea de Faraday sobre el estado electrótonico, Maxwell introdujo en la ciencia el nuevo concepto sobre la corriente de desplazamiento y generalizó todos los hechos de la electrodinámica macroscópica en un sis-

---

[5] J. C. Maxwell, *Scientific Papers,* ed. cit., vol. 1, p. 500; Encyclopedia Britannica, art. J. C. Maxwell.

[6] *Ibidem,* vol. I, pp. 534-536.

[7] Enciclopedia Espasa-Calpe, tomo 33, art. Maxwell, James Clerk, p. 1276; J. Maxwell, *ob. cit.,* p. XXVII.

[8] J. G. Crowther, *ob. cit.* p. 211.

tema de ecuaciones que, desde entonces, reciben el nombre de ecuaciones de Maxwell. A partir de estas ecuaciones surgió, en calidad de consecuencia fundamental, la deducción sobre la existencia de las ondas electromagnéticas que se propagan con la velocidad de la luz. Esto le permitió a Maxwell descubrir la relación entre la luz y el electromagnetismo y, también, entre las características ópticas y eléctricas de la substancia. No obstante que ya en 1865 Maxwell había expresado las ideas fundamentales sobre la naturaleza electromagnética de la luz,[9] la existencia de las ondas electromagnéticas predichas por Maxwell, sólo fue confirmada experimentalmente en 1887-1888 por el gran físico alemán Heinrich Hertz y después por otros físicos. Además, la presión de la luz calculada teóricamente por Maxwell, fue medida por el físico ruso P. N. Lebediev en 1899.[10]

Además de ser extraordinario investigador científico, Maxwell era un gran divulgador de los conocimientos científicos, pues escribió una serie de artículos para la *Encyclopedia Britannica,* la revista Nature, etc. y dio conferencias y presentó informes ante públicos numerosos. Obtuvieron gran renombre sus libros: *Theory of Heat* (1870), su tratado

[9] J. C. Maxwell, *ob. cit.,* pp. 535-536.

[10] Diccionario Biográfico de Hombres de las Ciencias Naturales y de la Técnica, Editorial Cientifica del Estado, *Gran Enciclopedia Soviética,* Moscú 1958-59, vol. II, p. 9.

elemental sobre dinámica *Matter and Motion* (1877) y su *Elementary Treatise on Electricity* del cual dejó escrita la mayor parte y fue completado y publicado en 1881 por el profesor Garnett, Demostrador de Maxwell, en el laboratorio Cavendish.

Maxwell manifestó gran interés por la historia de la ciencia. En 1879, publicó *The Electrical Researches of the Honorable Henry Cavendish* escritas entre 1771 y 1781, verificando su experimento sobre la ley fundamental de las interacciones eléctricas y enriqueciéndolas con abundantes notas originales.

En 1890 fue editada por W. D. Niven y publicada por la Cambridge University Press una edición conmemorativa de sus *Scientific Papers* que constaba de dos volúmenes que contenían 101 trabajos, incluyendo los mencionados, a excepción de los libros, en este breve esbozo.

Finalmente, es conveniente mencionar que por su importante trabajo *On Governors* publicado en 1868 en los *Proceedings of the Royal Society,* dedicado al análisis matemático de los sistemas de regulación, análogos al inventado por el físico inglés James Watt, se considera a Maxwell (conjuntamente con el físico y astrónomo inglés G. B. Airy, quien publicó un trabajo anterior al de Maxwell, sobre tal tema) como precursor de la Teoría de la Regulación

Automática.[11] Y de acuerdo con las palabras del genial matemático norteamericano Norbert Wiener, James Clerk Maxwell es precursor de la Cibernética.[12]

[11] A. A. Andronov, *Sobraniev Trudov* (Recopilación de Trabajos), ed. Academia de Ciencias de la U.R.S.S., Moscú, 1956, pp. 475-479 y 490-496.

[12] N. Wiener, *Cibernetics* (*or control and communication in the animal and the machine*), M. I. T. Press and John Wiley and Sons, Inc. second edition, 1961, pp. 11-12.

CAPITULO I

INTRODUCCION

1. NATURALEZA DE LA CIENCIA FÍSICA

La ciencia física es la parte del conocimiento que se relaciona con el orden de la naturaleza o, en otras palabras, con la sucesión regular de los acontecimientos.

Sin embargo, el nombre de ciencia física se aplica frecuentemente, en forma más o menos restringida, a las ramas de la ciencia en que los fenómenos considerados son de la especie más simple y abstracta, excluyendo la consideración de los fenómenos más complejos como los que se observan en los seres vivientes.

El caso más simple de todos es aquel en que un suceso o fenómeno puede ser descrito como un cambio en la disposición de ciertos cuerpos. Así, el movimiento de la luna puede ser descrito enunciando los cambios en su posición con relación a la tierra, en el orden en que se suceden dichos cambios.

En otros casos podemos saber que ha ocurrido algún cambio de disposición, pero quizá no podamos precisar qué es ese cambio.

Así, cuando el agua se congela, sabemos que las moléculas o partes más pequeñas de la sustancia de-

ben estar dispuestas en forma diferente en el hielo y en el agua. Sabemos también que esta disposición en el hielo debe tener cierta clase de simetría, porque el hielo está en forma de cristales simétricos, pero aún no tenemos un conocimiento preciso de la disposición real de las moléculas en el hielo. Pero siempre que podamos describir completamente el cambio de disposición o arreglo, tendremos un conocimiento, tan perfecto como es posible, de lo que ha ocurrido, aunque aún tendremos que conocer las condiciones necesarias en las que un suceso semejante tendrá lugar siempre.

Por consiguiente, la primera parte de la ciencia física se refiere a la posición y al movimiento relativos de los cuerpos.

2. Definición de un sistema material

En todo procedimiento científico empezamos por marcar cierta región o tema como campo de nuestras investigaciones. A esto debemos confinar nuestra atención, olvidando al resto del universo hasta que hayamos completado la investigación en que estamos comprometidos. En la ciencia física, por consiguiente, el primer paso es definir claramente el sistema material que hacemos tema de nuestros enunciados. Este sistema puede ser de cualquier grado de complejidad. Puede ser una sola partícula material, un cuerpo de tamaño finito,

o un número cualquiera de cuerpos como el anterior y hasta puede extenderse de modo que incluya a la totalidad del universo material.

3. Definición de interno y externo

Todas las relaciones o acciones entre una parte de este sistema y otra se llaman relaciones o acciones internas.

Aquellas relaciones entre la totalidad o cualquier parte del sistema y cuerpos no incluidos en el sistema se llaman relaciones o acciones Externas. Estudiamos a éstas solamente hasta donde afectan al sistema mismo, sin considerar su efecto sobre cuerpos externos. Las relaciones y acciones entre cuerpos no incluidos en el sistema no son tomados en consideración. No podemos investigarlas sino haciendo que nuestro sistema incluya a estos otros cuerpos.

4. Definición de configuración

Cuando un sistema material es considerado con respecto a la posición relativa de sus partes, el conjunto de las posiciones relativas se llama la configuración del sistema.

Un conocimiento de la configuración del sistema en un instante dado implica un conocimiento de la posición de cada punto del sistema con respecto a cualquier otro punto en ese instante.

5. Diagramas

La configuración de sistemas materiales puede ser representada en modelos, planos o diagramas. Se supone que el modelo o diagrama es semejante al sistema material solamente en forma, no necesariamente en ningún otro aspecto.

Un plano o un mapa representa sobre el papel en dos dimensiones lo que puede ser de tres dimensiones en realidad y sólo puede ser representado completamente por un modelo. Usaremos el término diagrama para significar cualquier figura geométrica, ya sea plana o no, mediante la cual estudiamos las propiedades de un sistema material. Así, cuando hablamos de la configuración de un sistema, la imagen que formamos en nuestras mentes es la de un diagrama, que representa completamente la configuración, pero que no tiene ninguna de las otras propiedades del sistema material. Además de diagramas de configuración podemos tener diagramas de velocidad, de esfuerzo, etc., que no representan la forma del sistema, aunque por medio de ellos se pueden estudiar las velocidades relativas o las fuerzas internas.

6. Una partícula material

Un cuerpo tan pequeño que, *para los propósitos de nuestra investigación,* las distancias entre sus

diferentes partes se pueden despreciar, se llama una partícula material.

Así, en ciertas investigaciones astronómicas los planetas, y aun el sol, pueden considerarse cada uno como una partícula material, porque no tomamos en cuenta la diferencia de las acciones de las diversas partes de estos cuerpos. Pero no podemos tratarlos como partículas materiales cuando investigamos su rotación. Hasta un átomo, cuando lo consideramos capaz de rotar, debe considerarse como constituido por muchas partículas materiales.

El diagrama de una partícula material es, por supuesto, un punto matemático, que no tiene configuración.

7. Posición relativa de dos partículas materiales

El diagrama de dos partículas materiales consiste de dos puntos, como por ejemplo A y B.

La posición de B con relación a A se indica con la dirección y longitud de la recta $\overline{AB}$ trazada *desde* A *hasta* B. Si se empieza desde A y se avanza en la dirección indicada por la línea $\overline{AB}$ una distancia igual a la longitud de esa línea, se llegará a B. La dirección y distancia mencionadas pueden indicarse también con cualquier otra línea tal como $\overline{ab}$, que es paralela e igual a $\overline{AB}$. La posición de A con respecto a B es indicada por la dirección y longitud de la

línea $\overline{BA}$, trazada *desde* B *hasta* A, o por la línea $\overline{ba}$, igual y paralela a $\overline{BA}$.

Es evidente que $\overline{BA} = - \overline{AB}$.

Al nombrar a una línea con las letras de sus extremos, el orden de las letras es siempre aquel en que se traza la línea.

8. Vectores

La expresión $\overline{AB}$, en geometría, es simplemente el nombre de una línea. Aquí indica la operación mediante la cual se traza la línea, o sea la de llevar un punto trazante en una cierta dirección a una cierta distancia. Al iniciar una operación, $\overline{AB}$ se llama Vector y la operación es completamente definida por la dirección y distancia de la transferencia. El punto inicial, que se llama el origen del vector, puede estar dondequiera.

Para definir una línea recta finita debemos enunciar su origen así como su dirección y longitud. Todos los vectores, sin embargo, son considerados como iguales si son paralelos (y trazados en el mismo sentido) y de la misma magnitud.

Cualquier cantidad, como por ejemplo una velocidad o una fuerza, * que tiene una dirección definida y una magnitud definida, puede ser tratada como un vector, y puede ser indicada en un diagrama con una línea recta cuya dirección es paralela al vector, y su longitud representa, de acuerdo con una escala determinada, la magnitud del vector.

* Una fuerza es especificada más completamente como un vector localizado en su línea de acción, llamada por Clifford un rotor; además, solamente cuando el cuerpo sobre el cual actúa es tratado como rígido, el punto de aplicación carece de importancia.

9. Sistema de tres partículas

Consideremos a continuación un sistema de tres partículas.

Su configuración es representada por un diagrama de tres puntos, A, B, C.

La posición de B con respecto a A es indicada por el vector $\overline{AB}$, y la de C con respecto a B por el vector $\overline{BC}$.

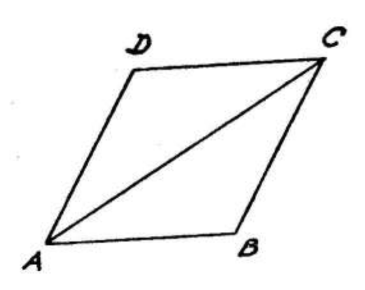


Figura 1

Es manifiesto que con estos datos, cuando A se conoce, podemos encontrar B y después C, de modo que la configuración de los tres puntos esté completamente determinada.

La posición de C con respecto a A es indicada por el vector $\overline{AC}$, y por esta última observación el

valor de $\overline{AC}$ puede ser deducido de los de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.

El resultado de la operación $\overline{AC}$ es llevar el punto trazante desde A hasta C. Pero el resultado es el mismo si el punto trazante se lleva primero desde A hasta B y después desde B hasta C, y esta es la suma de las operaciones $\overline{AB} + \overline{BC}$.

10. Adición de vectores

Por consiguiente, la regla para la adición de vectores puede enunciarse así:

Desde cualquier punto como origen trácense sucesivamente los vectores, de tal modo que cada vector empiece en el fin del precedente. La línea recta desde el origen hasta la extremidad de la serie representa al vector que es la suma de los vectores.

El orden de adición es indiferente, porque si escribimos $\overline{BC} + \overline{AB}$ la operación indicada puede efectuarse trazando $\overline{AD}$ paralelo e igual a $\overline{BC}$, y luego uniendo $\overline{DC}$, que, según Euclides, I. 33, * es paralelo e igual a $\overline{AB}$, por lo que con estas dos operaciones

* Ver la edición bilingüe: griego-español de Euclides "Elementos de Geometría", Libro I, pp. 81-83 en Obras Completas, Bibliotheca Scriptorum Graecorum et Romanorum Mexicana, Universidad Nacional Autónoma de México, 1944. Al lector estudioso le recomendamos: "The Thirteen Books of Euclid's Elements", translated from the text of Heiberg, with Introduction and Commentary by Sir Thomas L. Heath; second edition (revised with additions), Volume I, pp. 322-323, Dover Publications Inc., New York, 1956. (Nota de la Red.)

llegamos al punto C en cualquier orden en que las efectuemos.

Lo mismo es verdadero para cualquier número de vectores, tomándolos en el orden que nos plazca.

11. Sustracción de un vector de otro

Para expresar la posición de C con respecto a B en términos de las posiciones de B y C con respecto a A, observemos que podemos llegar desde B hasta C ya sea pasando por la línea recta $\overline{BC}$ o pasando desde B hasta A y luego desde A hasta C. Por consiguiente

$$\begin{aligned}\overline{BC} &= \overline{BA} + \overline{AC}\\ &= \overline{AC} + \overline{BA} \text{ puesto que el orden de adición es indiferente.}\\ &= \overline{AC} - \overline{AB} \text{ puesto que } \overline{AB} \text{ es igual y opuesto a } \overline{BA}.\end{aligned}$$

O sea el vector $\overline{BC}$, que expresa la posición de C con respecto a B, se encuentra restando el vector de B del vector de C, siendo trazados estos vectores hacia B y C respectivamente desde cualquier origen común A.

12. Origen de vectores

Las posiciones de cualquier número de partículas pertenecientes a un sistema material pueden definirse por medio de los vectores trazados hasta cada una de esas partículas desde algún punto único. Este punto

se llama el origen de los vectores, o, más brevemente, el Origen.

Este sistema de vectores determina la configuración de todo el sistema; porque si deseamos conocer la posición de cualquier punto B con respecto a cualquier otro punto A, se le puede encontrar a partir de los vectores $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ por medio de la ecuación

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}.$$

Podemos elegir un punto cualquiera como origen y hasta ahora no hay ninguna razón para elegir un punto en vez de otro. La configuración del sistema (es decir, la posición de sus partes entre sí) permanece la misma, cualquiera que sea el punto elegido como origen. Sin embargo, muchas investigaciones se simplifican eligiendo apropiadamente el origen.

13. Posición relativa de dos sistemas

Si se conocen las configuraciones de dos sistemas diferentes, teniendo cada sistema su propio origen y si entonces deseamos incluir ambos sistemas en un sistema más grande que tenga, digamos, el mismo origen que el primero de los dos sistemas, debemos precisar la posición del origen del segundo sistema con respecto a la del primero, y debemos poder trazar en el segundo sistema líneas paralelas a las del primero.



Figura 2

Entonces, de acuerdo con el Artículo 9, la posición de un punto P del segundo sistema, con respecto al primer origen O, es representada por la suma del vector $\overline{O'P}$ de ese punto con respecto al segundo origen O', y el vector $\overline{OO'}$ del segundo origen, O', con respecto al primero, O.

14. Tres datos para la comparación de dos sistemas

Tenemos un ejemplo de esta formación de un sistema mayor con dos o más sistemas menores cuando dos naciones vecinas, que han hecho el levantamiento topográfico y el mapa de su propio territorio, acuerdan conectar sus levantamientos topográficos para incluir a ambos países en un sistema. Para este propósito son necesarias tres cosas.

PRIMERO. Una comparación del origen seleccionado por un país con el seleccionado por el otro.

SEGUNDO. Una comparación de las direcciones de referencia usadas en los dos países.

TERCERO. Una comparación de las normas de longitud usadas en los dos países.

1. En los países civilizados la latitud se determina desde el ecuador, pero la longitud se determina desde un punto arbitrario como Greenwich o París. Por consiguiente, para hacer que el mapa de Inglaterra ajuste con el de Francia, debemos precisar la diferencia de longitud entre el Observatorio de Greenwich y el de París.

2. Cuando se ha hecho un levantamiento topográfico sin instrumentos astronómicos, las direcciones de referencia han sido algunas veces las dadas por el compás magnético. Creo que este fue el caso en los levantamientos topográficos originales de algunas islas de la India Occidental. Los resultados de este levantamiento, aunque dando correctamente la configuración local de la isla, no podrían ajustarse apropiadamente en un mapa general del mundo hasta que no se precisara la desviación de la brújula del norte verdadero en el tiempo del levantamiento topográfico.

3. Para comparar el levantamiento topográfico de Francia con el de Inglaterra, debe compararse el metro, que es la norma francesa de longitud, con la yarda, que es la norma inglesa de longitud.

La yarda es definida por el Acta del Parlamento 18 y 19 Vict. C 72, julio 30, 1855, que decreta "que la línea recta o distancia entre los centros de las líneas transversales en las dos clavijas de oro de la barra de bronce depositada en la oficina de la Tesorería será la yarda norma genuina a 62° Farenheit, y si se pierde, será reemplazada por medio de sus copias".

El metro deriva su autoridad de una ley de la República Francesa en 1795. Es definido como la distancia entre los extremos de cierta varilla de platino hecha por Borda, estando la varilla a la temperatura del hielo fundente. Se ha encontrado por las mediciones del Capitán Clarke que el metro es igual a 39.37043 pulgadas inglesas.

15. Sobre la idea de espacio

Hemos considerado hasta ahora la mayoría de las cosas que deben tomarse en cuenta con respecto a la configuración de un sistema material. Restan, sin embargo, unos cuantos puntos relativos a la metafísica del tema, que tienen una gran importancia para la física.

Hemos descrito el método de combinar varias configuraciones dentro de un sistema que las incluye a todas. De este modo, agregamos a la pequeña región que podemos explorar al abrir las piernas las regiones más distantes que podemos alcanzar caminando o siendo transportados. A estas últimas agregamos aquellas que conocemos por los informes de otros y aquellas regiones inaccesibles cuyas posiciones determinamos solamente por un proceso de cálculo, hasta que al fin reconocemos que cada lugar tiene

una posición definida con respecto a cualquier otro lugar, ya sea o no que un lugar sea accesible desde el otro.

Así, de mediciones hechas sobre la superficie de la tierra deducimos la posición del centro de la misma con relación a objetos conocidos y calculamos el número de millas cúbicas que hay en el volumen de la tierra, con total independencia de cualquier hipótesis sobre lo que pueda existir en el centro de la tierra, o en cualquier otro lugar bajo esa delgada capa de la corteza terrestre, que es la única que podemos explorar directamente.

16. Error de Descartes

Aparece, entonces, que la distancia entre una cosa y otra no depende de ninguna cosa material entre ellas, como Descartes parece aseverar cuando dice (Princip. Phil., II. 18) que si lo que está en un recipiente hueco se saca de éste sin que nada entre para llenar su lugar, los lados del recipiente, no teniendo nada entre ellos, estarían en contacto.

Este aserto está fundado en el dogma de Descartes, de que la extensión en longitud, anchura y profundidad que constituye el espacio es la sola propiedad esencial de la materia. "La naturaleza de la materia", nos dice, "o del cuerpo considerado generalmente, no consiste en que una cosa sea dura, o pesada, o coloreada, sino solamente en estar extendida en longitud, anchura y profundidad" (Princip., II. 4). Al confundir así las propiedades de la materia con las del espacio, llega a la conclusión lógica de que si la materia dentro de un recipiente pudiera ser enteramente removida, el espacio dentro del recipiente ya no existiría. De hecho, asume que todo espacio debe estar siempre lleno de materia.

Me he referido a esta opinión de Descartes con el fin de demostrar la importancia de las opiniones sensatas en dinámica elemental. La propiedad primaria de la materia, en verdad, fue anunciada claramente por Descartes en lo que él llama la "Primera Ley de la Naturaleza" (Princip., II. 37): "Que cada cosa individual, en cuanto es en sí misma, persevera en el mismo estado, ya sea de movimiento o de reposo."

Cuando lleguemos a las leyes del movimiento de Newton veremos que en las palabras "en cuanto es en sí misma", apropiadamente entendida, es donde se encuentra la verdadera definición primaria de materia y la verdadera medida de su cantidad. Descartes, no obstante, nunca llegó a un entendimiento completo de sus propias palabras (*quantum in se est*) y así cayó de nuevo en su original confusión de materia con espacio siendo el espacio, de acuerdo con él, la única forma de substancia y todas las cosas existentes sólo afecciones de espacio. Este error se repite en cada parte del gran trabajo de Descartes, y forma uno de los cimientos decisivos del sistema de Spinoza. No intentaré seguir el ras-

tro de este error hasta tiempos más modernos, pero aconsejaría a quienes estudian cualquier sistema de metafísica que examinen cuidadosamente aquella parte del sistema que trate de las ideas físicas.

Encontraremos más conducente al progreso científico reconocer, con Newton, las ideas de tiempo y espacio como distintas, al menos en pensamiento, a la del sistema material en que estas ideas sirven para coordinar sus relaciones.

17. Sobre la idea de Tiempo

La idea de Tiempo, en su forma más primitiva, es probablemente el reconocimiento de un orden de sucesión en nuestros estados de conciencia. Si mi memoria fuera perfecta, yo podría referir cada suceso dentro de mi propia experiencia a su lugar apropiado en una serie cronológica. Pero me sería difícil, si no imposible, comparar el intervalo entre un par de sucesos y el intervalo entre otro par, para determinar, por ejemplo, si el tiempo durante el cual puedo trabajar sin sentirme cansado es mayor o menor ahora que cuando empecé a estudiar. Por nuestro intercambio con otras personas y por nuestra experiencia de los procesos naturales que se producen de manera uniforme o rítmica, llegamos a reconocer la posibilidad de arreglar un sistema de cronología en que todos los sucesos cualesquiera, ya sea relacionados con nosotros mismos o con otros, deben encontrar sus lugares.

De dos eventos, tal como la perturbación real de la estrella en la Corona Boreal, que causó los efectos luminosos examinados espectroscópicamente por el señor Huggins el 16 de mayo de 1866, y la sugerencia mental que guió al profesor Adams o al profesor Leverrier a empezar los ensayos que culminaron el 23 de septiembre de 1846 cuando el doctor Galle descubrió el planeta Neptuno, el mencionado primero debió haber ocurrido antes que el otro, después, o si no al mismo tiempo.

El tiempo absoluto, verdadero y matemático es concebido por Newton como un flujo a régimen constante que no es afectado por la rapidez o lentitud de los movimientos de las cosas materiales. También se le llama Duración. El tiempo relativo, aparente y común es duración si se estima como el movimiento de los cuerpos en días, meses y años. Estas medidas de tiempo deben considerarse provisionales pues el progreso de la astronomía nos ha enseñado a medir la desigualdad en la duración de los días, los meses y los años, por lo que se reduce el tiempo aparente a una escala más uniforme llamada Tiempo Solar Medio.

18. Espacio absoluto

El espacio absoluto es concebido como permaneciendo siempre semejante a sí mismo e inmóvil. La disposición de las partes de espacio no puede ser más alterada que el orden de las porciones de tiem-

po. El concebirlas moviéndose de sus lugares es tanto como concebir un lugar moviéndose al alejarse de sí mismo.

Pero como no hay nada para distinguir a una porción de tiempo de otra, excepto los diferentes sucesos que ocurren en ellas, de igual modo no hay nada para distinguir a una parte de espacio de otra, excepto su relación con el lugar de los cuerpos materiales. No podemos describir el tiempo de un suceso sino por referencia a algún otro suceso, o el lugar de un cuerpo sino por referencia a algún otro cuerpo. Todo nuestro conocimiento, tanto de tiempo como de lugar, es esencialmente relativo. Cuando un hombre ha adquirido el hábito de reunir palabras, sin molestarse en formar los pensamientos que pudieran corresponder a ellas, es fácil para él estructurar una antítesis entre este conocimiento relativo y un así llamado conocimiento absoluto y señalar nuestra ignorancia, respecto de la posición absoluta de un punto, como un ejemplo de la limitación de nuestras facultades. En todo caso, quienquiera que intente imaginar el estado de una mente consciente para conocer la posición absoluta de un punto, tendrá que contentarse para siempre con nuestro conocimiento relativo.

19. Enunciado de la máxima general de la ciencia física

Hay una máxima que se cita frecuentemente así:

"Las mismas causas siempre producirán los mismos efectos".

Para hacer inteligible esta máxima debemos definir lo que queremos decir con "las mismas causas" y "los mismos efectos", ya que es manifiesto que ningún suceso acontece más de una vez, por lo que las causas y efectos no pueden ser los mismos en todos los aspectos. Lo que se quiere decir realmente es que si las causas difieren solamente en lo que concierne al tiempo absoluto o al lugar absoluto en que ocurre el suceso, así diferirán los efectos.

El siguiente enunciado, que es equivalente a la máxima anterior, parece ser más definido, más explícitamente conectado con las ideas de espacio y tiempo y más conveniente de aplicación a casos particulares:

"La diferencia entre un suceso y otro no depende de la mera diferencia de los tiempos o los lugares en que ocurren, sino solamente de las diferencias en la naturaleza, configuración o movimiento de los cuerpos en cuestión."

De esto se sigue que, si un acontecimiento ha ocurrido en un tiempo y lugar dados, es posible que un suceso exactamente semejante ocurra en cualquier otro tiempo y lugar.

Hay otra máxima que no debe confundirse con la citada al principio de este artículo, que afirma "Que causas iguales producen efectos iguales".

Esto es cierto solamente cuando pequeñas varia-

ciones en las circunstancias iniciales producen sólo pequeñas variaciones en el estado final del sistema. En muchísimos fenómenos físicos se satisface esta condición; pero hay otros casos en que una pequeña variación inicial puede producir un cambio muy grande en el estado final del sistema, como cuando el desplazamiento de los "puntos" causa que un tren ferroviario choque contra otro en vez de mantener su curso apropiado.

CAPITULO II

SOBRE EL MOVIMIENTO

20. Definición de desplazamiento

Ya hemos comparado la posición de diferentes puntos de un sistema en el mismo instante de tiempo. Tenemos que comparar en seguida la posición de un punto en un instante dado con su posición en un instante anterior, llamado la Epoca.

El vector que indica la posición final de un punto con respecto a su posición en la época se llama el Desplazamiento de ese punto. Entonces si A_1 es la posición inicial y A_2 la posición final del punto A, la línea $\overline{A_1 A_2}$ es el desplazamiento de A y cualquier vector $\overline{oa}$ trazado desde el origen o paralelo e igual a $\overline{A_1 A_2}$ indica este desplazamiento.

21. Diagrama de desplazamiento

Si otro punto del sistema es desplazado desde B_1 hasta B_2, el vector $\overline{ob}$ paralelo e igual a $\overline{B_1 B_2}$ indica el desplazamiento de B.

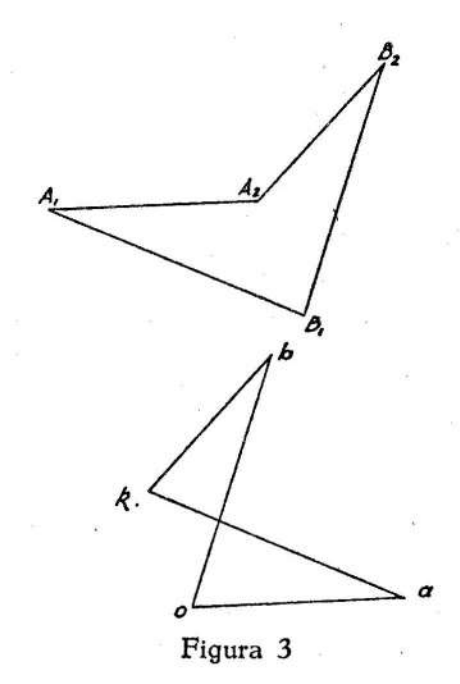


Figura 3

De manera semejante, el desplazamiento de cualquier número de puntos puede representarse con vectores trazados desde el mismo origen o. Este sistema de vectores se llama Diagrama de Desplazamiento. No es necesario trazar líneas reales para representar estos vectores; es suficiente indicar los puntos a, b, etc., en los extremos de los vectores. El diagrama de desplazamiento puede considerarse, por lo tanto, que consiste de un número de puntos a, b. etc., correspondientes a las partículas materiales A, B, etc., pertenecientes al sistema, junto con un punto o, cuya posición es arbitraria y que es el origen supuesto de todos los vectores.

22. Desplazamiento relativo

La línea ab en el diagrama de desplazamiento representa al desplazamiento del punto B con respecto a A.

Pues si en el diagrama de desplazamiento (Fig. 3) trazamos $\overline{ak}$ paralelo e igual a $\overline{B_1 A_1}$, y en la misma dirección, y unimos $\overline{kb}$, es fácil mostrar que $\overline{kb}$ es igual y paralelo a $\overline{A_2 B_2}$.

Porque el vector $\overline{kb}$ es la suma de los vectores $\overline{ka}$, $\overline{ao}$, y $\overline{ob}$, y $\overline{A_2 B_2}$ es la suma de $\overline{A_2 A_1}$, $\overline{A_1 B_1}$, y $\overline{B_1 B_2}$. Pero de estos $\overline{ka}$ es el mismo que $\overline{A_1 B_1}$, $\overline{ao}$ es el mismo que $\overline{A_2 A_1}$ y $\overline{ob}$ es el mismo que $\overline{B_1 B_2}$ y de acuerdo con el artículo 10 el orden de la suma es indiferente, por lo que el vector $\overline{kb}$ es el mismo, en dirección y magnitud, que $\overline{A_2 B_2}$. Ahora bien, $\overline{ka}$ ó $\overline{A_1 B_1}$ representa a la posición original de B con respecto a A, y $\overline{kb}$ ó $\overline{A_2 B_2}$ representa a la posición final de B con respecto a A. Por tanto, $\overline{ab}$ representa al desplazamiento de B con respecto a A, lo cual ha sido comprobado.

En el artículo 20 omitimos deliberadamente decir si el origen al que se refirió la configuración inicial y aquél al que se refirió la configuración final son absolutamente el mismo punto, o si, durante el desplazamiento del sistema, el origen también es desplazado.

Ahora podemos, por razón de argumento, suponer que el origen es absolutamente fijo, y que los des-

plazamientos representados por $\overline{oa}$, $\overline{ob}$, etc., son los desplazamientos absolutos. Para pasar de este caso a aquel en que el origen es desplazado, sólo tenemos que tomar A, uno de los puntos móviles, como origen. Estando representado el desplazamiento absoluto de A por $\overline{oa}$, el desplazamiento de B con respecto a A es representado, como hemos visto, por $\overline{ab}$ y así sucesivamente para cualesquiera otros puntos del sistema.

La disposición de los puntos a, b, etc., en el diagrama de desplazamiento es por consiguiente la misma, ya sea que reconozcamos los desplazamientos con respecto a un punto fijo o a un punto desplazado; la única diferencia es que adoptamos un diferente origen de vectores en el diagrama de desplazamiento. La regla es que cualquier punto que tomemos, ya sea fijo o móvil, como origen del diagrama de configuración, tomemos el punto correspondiente como origen en el diagrama de desplazamiento. Si deseamos indicar el hecho de que ignoramos totalmente el desplazamiento absoluto en el espacio de cualquier punto del sistema, podemos hacerlo construyendo el diagrama de desplazamiento como un simple sistema de puntos, sin indicar en forma alguna cuál de ellos tomamos como origen.

Este diagrama de desplazamiento (sin un origen) representará entonces, ni más ni menos, todo lo que podemos saber sobre el desplazamiento del sistema. Consiste simplemente de un número de puntos a, b, c, etc., correspondientes a los puntos A, B, C, etc., del sistema material y un vector, como $\overline{ab}$, representa el desplazamiento de B con respecto a A.

23. Desplazamiento uniforme

Cuando los desplazamientos de todos los puntos de un sistema material con respecto a un punto externo son los mismos en dirección y magnitud, el diagrama de desplazamiento se reduce a dos puntos (uno corresponde al punto externo, y el otro a todos y cada uno de los puntos del sistema desplazado). En este caso los puntos del sistema no están deplazados entre sí, sino sólo con respecto al punto externo.

Esta es la clase de desplazamiento que ocurre cuando un cuerpo de forma invariable se mueve paralelamente a sí mismo. Esto puede llamarse desplazamiento uniforme.

24. Sobre el movimiento

Cuando el cambio de configuración de un sistema es considerado solamente con respecto a su estado al principio y al fin del proceso de cambio y sin referencia al tiempo durante el cual tiene lugar, se llama el desplazamiento del sistema.

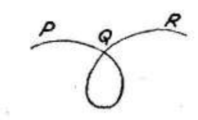
Cuando nosotros prestamos nuestra atención al proceso de cambio en sí, que tiene lugar en un cierto

tiempo y en una forma continua, el cambio de configuración es atribuido al movimiento del sistema.

25. Sobre la continuidad del movimiento

Cuando una partícula material es desplazada de modo que pase de una posición a otra, sólo puede hacerlo así viajando a lo largo de un curso o trayectoria desde una posición hasta la otra.

En cualquier instante durante el movimiento, la partícula se encontrará en algún punto único de la trayectoria y si seleccionamos cualquier punto de la trayectoria, la partícula pasará por ese punto una vez al menos * durante su movimiento.



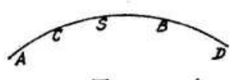


Figura 4

Esto es lo que se entiende al decir que la partícula describe una trayectoria continua. El movimiento de una partícula material la cual tiene existencia continua en tiempo y espacio es el tipo y modelo de toda forma de continuidad.

* Si la trayectoria se corta a sí misma formando un lazo como P, Q, R (Fig. 4), la partícula pasará por el punto de intersección Q dos veces y si la partícula regresa sobre su propia trayectoria, como en la trayectoria A, B, C, D, puede pasar por el mismo punto S tres o más veces.

26. Sobre la velocidad constante *

Si el movimiento de una partícula es tal que en iguales intervalos de tiempo, por cortos que sean, los desplazamientos de la partícula son iguales y en la misma dirección, se dice que la partícula se mueve con velocidad constante.

Es manifiesto que en este caso la trayectoria del cuerpo será una línea recta y la longitud de cualquier parte de la trayectoria será proporcional al tiempo en que se describa.

La razón o rapidez del movimiento se llama velocidad de la partícula y su magnitud se expresa diciendo que es tal distancia en tal tiempo, como, por ejemplo, diez millas en una hora o un metro en un segundo. En general seleccionamos una unidad de tiempo, tal como un segundo y medimos la velocidad por la distancia recorrida en la unidad de tiempo.

Si un metro es recorrido en un segundo y si la velocidad es constante, un milésimo o un millonésimo de metro será recorrido en un milésimo o un millonésimo de segundo. Por tanto, si podemos ob-

* Cuando los valores sucesivos de una cantidad para instantes de tiempo sucesivos son iguales, se dice que la cantidad es *constante*.

servar o calcular el desplazamiento durante cualquier intervalo de tiempo, por corto que sea, podemos deducir la distancia que sería recorrida en un tiempo mayor con la misma velocidad. Este resultado, que nos permite establecer la velocidad durante el intervalo corto de tiempo, no depende de la continuidad real del cuerpo para moverse a la misma rapidez durante el tiempo mayor. Así podemos saber que un cuerpo se está moviendo con la rapidez de diez millas en una hora, aunque su movimiento a esta rapidez pueda durar solamente un centésimo de segundo.

27. Sobre la medición de velocidad cuando es variable

Cuando la velocidad de una partícula no es constante, su valor en cualquier instante dado es medido por la distancia que sería recorrida en la unidad de tiempo por un cuerpo que tuviera la misma velocidad que la partícula tiene en ese instante.

Así, cuando decimos que en un instante dado, digamos un segundo después que un cuerpo ha empezado a caer, su velocidad es de 980 centímetros en un segundo, significamos que si la velocidad de una partícula fuera constante e igual a la del cuerpo que cae en el instante dado, recorrería 980 centímetros en un segundo.

Es especialmente importante entender lo que se

quiere decir por velocidad o rapidez de movimiento de un cuerpo, porque las ideas que son sugeridas a nuestras mentes al considerar el movimiento de una partícula son las que usó Newton en su método de las Fluxiones * y se encuentran en el cimiento de la grandiosa extensión de la ciencia exacta que ha tenido lugar en los tiempos modernos.

28. Diagrama de velocidades

Si la velocidad de cada uno de los cuerpos del sistema es constante y si comparamos las configuraciones del sistema en un intervalo de una unidad de tiempo, entonces los desplazamientos, siendo los producidos en la unidad de tiempo en cuerpos que se mueven con velocidades constantes, representarán a esas velocidades de acuerdo con el método de medición descrito en el artículo 26.

Si las velocidades no continúan constantes realmente durante una unidad de tiempo, entonces debemos imaginar otro sistema consistente en el mismo número de cuerpos y en el que las velocidades son las mismas que las de los cuerpos correspon-

* De acuerdo con el método de las Fluxiones, cuando el valor de una cantidad depende del de otra, la razón de variación de la primera cantidad con respecto a la segunda se puede expresar como una velocidad, imaginando que la primera cantidad representa al desplazamiento de una partícula, mientras la segunda fluye uniformemente con el tiempo.

dientes del sistema en el instante dado, pero permanecen constantes durante una unidad de tiempo. Los desplazamientos de este sistema representan a las velocidades del sistema real en el instante dado.

Otro modo de obtener el diagrama de velocidades de un sistema en un instante dado es tomar un pequeño intervalo de tiempo, digamos la n ésima parte de la unidad de tiempo, de modo que la media de este intervalo corresponda al instante dado. Tómese el diagrama de desplazamiento correspondiente a este intervalo y auméntense todas sus dimensiones n veces. El resultado será un diagrama de las velocidades *medias* del sistema durante el intervalo. Si ahora suponemos que el número n aumenta sin límite, el intervalo disminuirá sin límite, y las velocidades medias se aproximan sin límite a las velocidades reales en el instante dado. Finalmente cuando n llega a infinito el diagrama representará con precisión las velocidades en el instante dado.

29. Propiedades del diagrama de velocidades (Figura 5)

El diagrama de velocidades de un sistema compuesto de un número de partículas materiales consiste en un número de puntos, cada uno correspondiente a una de las partículas.

B.
A.
C. D. DIAGRAMA DE CONFIGURACIÓN
b.
a.
c. DIAGRAMA DE VELOCIDADES.
o. d.

Figura 5

La velocidad de cualquiera partícula B con respecto a cualquiera otra, A, se representa en dirección y magnitud con la línea $\overline{ab}$ en el diagrama de velocidades, trazadas desde el punto a, correspondiente a A, hasta el punto b, correspondiente a B.

De este modo podemos encontrar, por medio del diagrama, la velocidad relativa de dos partículas cualesquiera. El diagrama no nos dice nada acerca de la velocidad absoluta de un punto cualquiera; expresa exactamente lo que podemos saber respecto al movimiento, y nada más. Si queremos imaginar que $\overline{oa}$ representa a la velocidad absoluta de A, entonces la velocidad absoluta de cualquiera otra partícula B será representada por el vector $\overline{ob}$, trazado desde o como origen hasta el punto b, que corresponde a B.

Pero como es imposible definir la posición de un cuerpo excepto con respecto a la posición de algún

punto de referencia, igualmente es imposible definir la velocidad de un cuerpo, excepto con respecto a la velocidad del punto de referencia. La frase "velocidad absoluta" tiene tan poco significado como "posición absoluta". Por consiguiente, es mejor no distinguir ningún punto del diagrama de velocidades como el origen, sino considerar que el diagrama expresa las relaciones de todas las velocidades, sin definir el valor absoluto de ninguna de ellas.

30. Significado de la frase "en reposo"

Es verdad que cuando decimos que un cuerpo está en reposo usamos una manera de expresar que parece afirmar algo acerca de ese cuerpo considerado en sí mismo y podríamos imaginar que la velocidad de otro cuerpo, tomada con respecto a un cuerpo en reposo, sería su verdadera y única velocidad absoluta. Pero la frase "en reposo" significa en lenguaje ordinario "no tener velocidad con respecto aquella posición en la que el cuerpo se encuentra", como por ejemplo la superficie de la tierra o la cubierta de un barco. No puede significar más que esto.

Por consiguiente, es poco científico distinguir entre reposo y movimiento, tanto como entre dos diferentes estados de un cuerpo en sí mismo, ya que es imposible hablar de que un cuerpo está en reposo o en movimiento excepto por referencia, explícita o implícita, a algún otro cuerpo.

31. Sobre el cambio de velocidad

Tal como hemos comparado las velocidades de cuerpos diferentes en el mismo tiempo, así podemos comparar la velocidad relativa de un cuerpo con respecto a otro en tiempos diferentes.

Sea a_1, b_1, c_1 el diagrama de velocidades del sistema de cuerpos A, B, C en su estado inicial y si a_2, b_2, c_2 es el diagrama de velocidad en el estado final del sistema, entonces, si tomamos cualquier punto ω como origen y trazamos $\overline{\omega\alpha}$ igual y paralelo a $\overline{a_1 a_2}$, $\overline{\omega\beta}$ igual y paralelo a $\overline{b_1 b_2}$, $\omega\gamma$ igual y paralelo a $c_1 c_2$, y así sucesivamente, formaremos un diagrama de puntos α, β, γ, etc., tal que cualquier línea $\overline{\alpha\beta}$ de este diagrama representa, en dirección y magnitud, el cambio de la velocidad de B con respecto a A. Este diagrama puede llamarse el diagrama de Aceleraciones Totales.



Figura 6

32. Sobre la aceleración

La palabra Aceleración se usa aquí para denotar cualquier cambio de la velocidad, ya sea que ese cambio sea un aumento, una disminución o un cambio de dirección. Por tanto, en vez de distinguir, como en el lenguaje ordinario, entre la aceleración, el retardo, y la deflexión del movimiento de un cuerpo, decimos que la aceleración puede ser en la dirección del movimiento, en la dirección contraria, o transversalmente a esa dirección.

Así como el desplazamiento de un sistema es definido como el cambio de configuración del mismo, la Aceleración Total del sistema es definida como el cambio de velocidades del mismo. El proceso de construcción del diagrama de aceleraciones totales mediante una comparación de los diagramas de velocidades inicial y final, es el mismo que el proceso con que se construyó el diagrama de desplazamiento mediante una comparación de los diagramas de configuraciones inicial y final.

33. Sobre la razón de aceleración

Hemos considerado hasta ahora la aceleración total que tiene lugar durante un cierto intervalo de tiempo. Si la razón de aceleración es constante se mide con la aceleración total en una unidad de tiempo. Si la razón de aceleración es variable, su valor en

un instante dado, se mide con la aceleración total en la unidad de tiempo, de un punto cuya aceleración es constante e igual a la de la partícula en el instante dado.

Según esta definición, el método para deducir la razón de aceleración a partir de un conocimiento de la aceleración total en cualquier tiempo dado, es precisamente análogo al método por el cual se deduce la velocidad en cualquier instante a partir de un conocimiento del desplazamiento correspondiente.

El diagrama de aceleraciones totales construido para un intervalo de la n ésima parte de la unidad de tiempo y después aumentado n veces, es un diagrama de las razones medias de aceleración durante ese intervalo; y tomando el intervalo cada vez menor, llegamos finalmente a la verdadera razón de aceleración en la media de ese intervalo.

Como las razones de aceleración tienen que considerarse en la ciencia física con mucha mayor frecuencia que las aceleraciones totales, la palabra aceleración ha llegado a emplearse en el sentido en que hasta aquí hemos usado la frase razón de aceleración.

En lo futuro, por consiguiente, cuando usemos la palabra aceleración sin calificación, significaremos lo que hemos descrito aquí como razón de aceleración.

34. Diagrama de aceleraciones

El diagrama de aceleraciones es un sistema de pun-

tos, cada uno de los cuales corresponde a uno de los cuerpos del sistema material y es tal que cualquier línea $\overline{\alpha\ \beta}$ del diagrama representa a la razón de aceleración del cuerpo B con respecto al cuerpo A.

Conviene observar aquí que en el diagrama de configuración usamos las letras mayúsculas A, B, C, etc., para indicar la posición relativa de los cuerpos del sistema; en el diagrama de velocidades usamos las letras minúsculas a, b, c, etc., para indicar las velocidades relativas de estos cuerpos; y en el diagrama de aceleraciones usamos las letras griegas α, β, γ, etc., para indicar sus aceleraciones relativas.

35. Aceleración, un término relativo

La aceleración, como la posición y la velocidad es un término relativo y no puede interpretarse en forma absoluta.

Si cada partícula del universo material dentro del alcance de nuestros medios de observación sufriera en un instante dado una alteración de su velocidad por una nueva velocidad componente, igual en magnitud y dirección para una partícula tal, todos los movimientos relativos de los cuerpos dentro del sistema transcurrirían de manera perfectamente continua; y ni los astrónomos ni los físicos, aunque usaran constantemente sus instrumentos, podrían encontrar que algo hubiera ocurrido.

Cualquier suceso capaz de ser observado tiene lugar solamente si el cambio de movimiento ocurre de manera diferente en los diferentes cuerpos del sistema.

CAPITULO III

SOBRE LA FUERZA

36. Cinemática y cinética

Hemos considerado hasta ahora el movimiento de un sistema en su aspecto puramente geométrico. Hemos mostrado cómo estudiar y describir el movimiento de tal sistema, por arbitrario que sea, sin tomar en cuenta ninguna de las condiciones de movimiento que surgen de la acción mutua entre los cuerpos.

La teoría del movimiento tratada en esta forma se llama Cinemática. Cuando se toma en cuenta la acción mutua entre los cuerpos, la ciencia del movimiento se llama Cinética y cuando se da atención especial a la fuerza como causa del movimiento, se llama Dinámica.

37. Acción mutua entre dos cuerpos. esfuerzo

La acción mutua entre dos porciones de materia recibe nombres diferentes, de acuerdo con el aspecto bajo el cual se estudie y éste depende de la extensión

del sistema material que es el tema de nuestra atención.

Si tomamos en cuenta el fenómeno total de la acción entre las dos porciones de materia, llamamos a ese fenómeno Esfuerzo. Este esfuerzo, según el modo en que actúa, puede ser descrito como Atracción, Repulsión, Tensión, Presión, Esfuerzo Cortante, Torsión, etc.

38. Fuerza externa

Pero si confinamos nuestra atención a una de las porciones de materia, vemos, como en el artículo 2, solamente un lado de la operación (esto es, el que afecta a la porción de materia bajo nuestra consideración) y llamamos a este aspecto del fenómeno, con referencia a su efecto, una Fuerza Externa que actúa sobre esa porción de materia y con referencia a su causa lo llamamos la Acción de la otra porción de materia. El aspecto opuesto del esfuerzo se llama la Reacción sobre la otra porción de materia.

39. Diferentes aspectos del mismo fenómeno

En asuntos comerciales la misma operación entre dos partes contratantes se llama Compra cuando consideramos a una parte, Venta cuando consideramos a la otra y Comercio cuando tomamos en consideración a ambas partes.

El contador que examina los registros de la operación encuentra que las dos partes han sido asentadas en lados opuestos de sus respectivos libros mayores, y al comparar los libros debe tener presente en cada caso con qué interés está hecho cada libro.

Por razones similares, en las investigaciones dinámicas debemos recordar siempre cuál de los dos cuerpos tratamos, de modo que podemos expresar las fuerzas en interés de ese cuerpo y no poner ninguna de las fuerzas en el lado erróneo de la cuenta.

40. Leyes de Newton del movimiento

La fuerza externa o "impresa", considerada con referencia a su efecto (esto es, la alteración de los movimientos de cuerpos) es completamente definida y descrita en las tres leyes de Newton del movimiento.

La primera ley nos dice en qué condiciones no hay fuerza externa.

La segunda nos muestra cómo medir la fuerza cuando existe.

La tercera compara los dos aspectos de la acción entre dos cuerpos, según afecte a un cuerpo o al otro.

41. La primera ley del movimiento

LEY I. *Todo cuerpo persevera en su estado de reposo o de movimiento uniforme en una línea recta, a menos que se haga cambiar ese estado mediante fuerzas externas.*

El argumento experimental de la veracidad de esta ley es que, en cada caso en que encontramos una alteración del estado de movimiento de un cuerpo, podemos encontrar el origen de esta alteración en alguna acción entre ese cuerpo y otro, es decir, en alguna fuerza externa. La existencia de esta acción es indicada por su efecto sobre el otro cuerpo cuando el movimiento de ese cuerpo puede observarse. Así, el movimiento de una bala de cañón es retardado, pero esto se debe a una acción entre el proyectil y el aire que lo rodea, por lo que la bala experimenta una fuerza en la dirección opuesta a su movimiento relativo, en tanto que el aire, empujado hacia adelante por una fuerza igual, es puesto en movimiento y constituye lo que se llama *viento* de la bala de cañón.

Pero nuestra convicción de la veracidad de esta ley puede ser grandemente reforzada considerando lo que implica una negación de ella. Se da un cuerpo en movimiento. En un instante dado déjeselo a sí mismo y que no actúe sobre él ninguna fuerza. ¿Qué sucederá? Según la ley de Newton perseverará moviéndose uniformemente en una línea recta, esto es, su velocidad permanecerá constante tanto en dirección como en magnitud.

Si la velocidad no permanece constante, suponemos que varía. El cambio de velocidad, como vimos en el Artículo 31, debe tener una dirección y magnitud definidas. Según la máxima del Artículo

19, esta variación debe ser la misma, cualquiera que sea el tiempo o lugar del experimento. Por consiguiente, la dirección del cambio de movimiento debe ser determinada ya sea por la dirección del movimiento mismo, o por alguna dirección fija en el cuerpo.

En primer lugar, supongamos que la ley es que la velocidad disminuye en una cierta razón (que en interés del argumento podemos suponer muy lenta) tan lenta que no podríamos detectar con ningún experimento sobre cuerpos móviles, la disminución de velocidad en cientos de años.

La velocidad a que se hace referencia en esta ley hipotética sólo puede ser la velocidad referida a un punto absolutamente en reposo. Pues si es una velocidad relativa, tanto su dirección como su magnitud dependerán de la velocidad del punto de referencia.

Si al referirse a cierto punto, el cuerpo aparece moviéndose hacia el norte con velocidad decreciente, sólo tenemos que referirlo a otro punto que se mueve hacia el norte con velocidad uniforme mayor que la del cuerpo, y aparecerá moviéndose hacia el sur con velocidad creciente.

Por tanto, la ley hipotética no tiene significado, a menos que admitamos la posibilidad de definir el reposo absoluto y la velocidad absoluta.

Incluso si admitimos esto como una posibilidad, si se encontrara que es verdadera la ley hipotética, podría interpretarse no como una contradicción de la

ley de Newton, sino como evidencia de la acción resistente de algún medio en el espacio.

Tomemos otro caso. Supongamos que la ley sea que un cuerpo, no influenciado por ninguna fuerza, cesa de moverse repentinamente. Esto no sólo es contradicho por la experiencia, sino que conduce a una definición de reposo absoluto como el estado que un cuerpo asume tan pronto como es liberado de la acción de fuerzas externas.

Se puede probar así que la negación de la ley de Newton está en contradicción con el único sistema de doctrina congruente sobre espacio y tiempo que la mente humana ha sido capaz de formar.

42. Sobre el equilibrio de fuerzas

Si un cuerpo se mueve con velocidad constante en una línea recta, las fuerzas externas que actúan sobre él, si las hay, se balancean entre sí, o sea que están en equilibirio.

Así, si un carro de ferrocarril se mueve con velocidad constante en una línea recta, las fuerzas externas que actúan sobre él (tales como la tracción del carro precedente empujándolo hacia adelante, el arrastre atrás de él, la fricción de los rieles, la resistencia del aire actuando hacia atrás, el peso del carro actuando hacia abajo y la presión de los rieles actuando hacia arriba), deben equilibrarse exactamente entre sí.

Los cuerpos en reposo con respecto a la superficie de la tierra están realmente en movimiento y su movimiento no es constante ni en línea recta. Por consiguiente, las fuerzas que actúan sobre ellos no están equilibradas exactamente. El peso aparente de los cuerpos es estimado por la fuerza hacia arriba requerida para mantenerlos en reposo con relación a la tierra. El peso aparente es, en consecuencia, algo menor que la atracción de la tierra y forma un ángulo menor con el eje de la tierra, de modo que el efecto combinado de la fuerza sustentante y la atracción de la tierra es una fuerza perpendicular al eje de la misma justa suficiente para causar que el cuerpo se mantenga sobre la trayectoria circular que debe describir si reposa sobre la tierra.

43. Definición de tiempos iguales

La primera ley del movimiento, al enunciar en qué circunstancias la velocidad de un cuerpo móvil permanece constante, nos proporciona un método para definir intervalos iguales de tiempo. Sea que el sistema material consiste de dos cuerpos que no actúan entre sí y que no son influidos por ningún cuerpo externo al sistema. Si uno de estos cuerpos está en movimiento con respecto al otro, la velocidad relativa, según la primera ley del movimiento, será constante y en una línea recta.

Por tanto, los intervalos de tiempo son iguales

cuando los desplazamientos relativos durante esos intervalos son iguales.

A primera vista, parecería que esto no sería sino una definición de lo que entendemos por intervalos de tiempo iguales, una expresión que hasta ahora no hemos definido en absoluto.

Pero si suponemos que existe otro sistema móvil de dos cuerpos, cada uno de los cuales no es influido por ningún otro cuerpo, este segundo sistema nos dará un método independiente para comparar intervalos de tiempo.

El enunciado de que los intervalos de tiempo iguales son aquellos durante los cuales ocurren desplazamientos iguales en un sistema cualquiera como éste, equivale por tanto a la aseveración de que la comparación de intervalos de tiempos conduce al mismo resultado, ya sea que usemos el primer sistema de dos cuerpos o el segundo sistema como nuestro reloj.

Vemos así la posibilidad teórica de comparar intervalos de tiempo por distantes que estén, aunque apenas es necesario observar que el método no puede ponerse en práctica en la vecindad de la tierra, o de cualquiera otra masa grande de materia gravitatoria.

44. La segunda ley del movimiento

LEY II. *El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza aplicada y ocurre en la dirección en la que se aplica la fuerza.*

Newton entiende por movimiento lo que en el lenguaje científico moderno se llama Momentum, en el que se toma en cuenta tanto la cantidad de materia movida como la rapidez a que viaja.

Por fuerza aplicada entiende lo que ahora se llama Impulso, en el que se toma en cuenta tanto el tiempo durante el cual actúa la fuerza como la intensidad de la misma.

45. Definición de masas iguales y de fuerzas iguales

Por tanto, una exposición de la ley implica una definición de cantidades iguales de materia y de fuerzas iguales.

Asumiremos que es posible hacer que la fuerza con que un cuerpo actúa sobre otro sea de la misma intensidad en ocasiones diferentes.

Esto puede hacerse si admitimos la permanencia de las propiedades de los cuerpos. Sabemos que un hilo de caucho, al estirarse más allá de cierta longitud, ejerce una tensión que aumenta mientras más se alarga el hilo. Debido a esta propiedad, se dice que el hilo es elástico. Cuando el mismo hilo es estirado a la misma longitud, si sus propiedades permanecen constantes, ejercerá la misma tensión. Ahora atemos un extremo del hilo a un cuerpo M, sobre el cual no actúa más fuerza que la tensión del hilo y sujetemos el otro extremo con la mano, tiran-

do de él en una dirección constante con una fuerza adecuada para alargar el hilo hasta una longitud dada. La fuerza que actúa sobre el cuerpo será entonces de una intensidad dada, F. El cuerpo adquirirá velocidad y al final de una unidad de tiempo esta velocidad tendrá un cierto valor, V.

Si el mismo hilo se ata a otro cuerpo N y se tira de él como en el caso anterior, de modo que el alargamiento sea el mismo que antes, la fuerza que actúa sobre el cuerpo será la misma; y si la velocidad comunicada a N en una unidad de tiempo es también la misma, por ejemplo V, entoces decimos de los dos cuerpos M y N que éllos consisten de cantidades iguales de materia, o, en lenguaje moderno, que tienen igual masa. De este modo, usando un cordón elástico, podríamos ajustar las masas de varios cuerpos de manera que cada una fuera igual a una unidad de norma de masa, tal como una libra avoirdupois, que es la norma de masa en Inglaterra.

46. Medición de la masa

El valor científico del método dinámico de comparar cantidades de materia se aprecia mejor comparándolo con otros métodos actualmente en uso.

Siempre que se trate de cuerpos de la misma clase exactamente, no hay dificultad para entender cómo debe medirse la cantidad de materia. Si cantidades iguales de la substancia producen efectos iguales de cualquier clase, podemos emplear estos efectos como medidas de la cantidad de la substancia.

Por ejemplo, si manejamos ácido sulfúrico de intensidad uniforme, podemos estimar la cantidad de una porción dada de él en varias formas diferentes. Podemos pesarlo, podemos vaciarlo en un recipiente graduado y así medir su volumen, o podemos determinar qué cantidad de una solución norma de carbonato de potasio lo neutralizará.

Podríamos usar los mismos métodos para estimar una cantidad de ácido nítrico si nos ocupáramos solamente de ácido nítrico; pero si deseáramos comparar una cantidad de ácido nítrico con una cantidad de ácido sulfúrico, obtendríamos diferentes resultados pesando, midiendo y probando con una solución alcalina.

De estos tres métodos, el de pesar depende de la atracción entre el ácido y la tierra, el de medir depende del volumen que ocupa el ácido y el de análisis volumétrico depende del poder del ácido para combinarse con el carbonato de potasio.

En dinámica abstracta, sin embargo, la materia sólo se considera bajo el aspecto de que sea cambiado su movimiento por la aplicación de una fuerza. Por tanto, dos cuerpos cualesquiera son de igual masa si fuerzas iguales aplicadas a estos cuerpos producen, en tiempos iguales, cambios iguales de velocidad. Esta es la única definición de masas iguales que puede admitirse en dinámica y es aplicable

a todos los cuerpos materiales, sin importar cómo puedan estar constituidos.

Es un hecho observado que los cuerpos de masa igual, situados en la misma posición en relación con la tierra, son atraídos igualmente hacia la tierra, sin importar de qué están constituidos; pero esto no es una doctrina de dinámica abstracta, fundada en principios axiomáticos, sino un hecho descubierto por observación y verificado por los cuidadosos experimentos de Newton sobre los tiempos de oscilación de bolas de madera huecas suspendidas de cuerdas de la misma longitud y que contenían oro, plata, plomo, vidrio, arena, sal común, madera, agua y trigo.

Sin embargo, el hecho de que en la misma posición geográfica los pesos de masas iguales son iguales, está tan bien establecido, que nunca se usa ningún otro modo de comparación de masas que el de comparar sus pesos, tanto en el comercio como en la ciencia, excepto en investigaciones emprendidas con el propósito especial de determinar en medida absoluta el peso de la unidad de masa en diferentes partes de la superficie terrestre. El método empleado en estas investigaciones es esencialmente el mismo que el de Newton, es decir, la medición de la longitud de un péndulo que oscila segundos.

La unidad de masa en Inglaterra es definida por el Acta del Parlamento (18 & 19 Vict. c. 72, julio 30, 1855) como una pieza de platino marcada "P.

S., 1844, 1 lb." depositada en la oficina de la Tesorería, que "será y se denominará la Libra Norma Imperial Avoirdupois". Una sietemilésima parte de esta libra es un grano.

La norma francesa de masa es el "Kilogramo de los Archivos", hecho de platino por Borda. El profesor Miller encontró que el kilogramo es igual a 15 432.34874 granos.

47. Medición numérica de la fuerza

La unidad de fuerza es la fuerza que, actuando sobre la unidad de masa durante la unidad de tiempo, genera la unidad de velocidad.

Así el peso de un gramo (es decir, la fuerza que lo hace caer) puede determinarse dejando que caiga libremente. Al final de un segundo su velocidad será de 981 centímetros en un segundo aproximadamente, si el experimento se hace en Inglaterra. Por consiguiente, el peso de un gramo es representado por el número 981, si se toman como unidades fundamentales el centímetro, el gramo y el segundo.

A veces conviene comparar fuerzas con el peso de un cuerpo y hablar de una fuerza de tantas libras de peso o gramos de peso. Esto se llama medida de la Gravitación. Debemos recordar, sin embargo, que aunque una libra o un gramo son los mismos en todo el mundo, el peso de una libra o un gramo es mayor en altas latitudes que cerca del ecuador y por consiguiente una medición de la fuerza en medida de gravitación no tiene valor cien-

tífico a menos que se precise en qué parte del mundo se hizo la medición.

Si, como ocurre en Inglaterra, las unidades de longitud, masa y tiempo son un pie, una libra y un segundo, la unidad de fuerza es la que, en un segundo, comunicaría a una libra una velocidad de un pie en un segundo. Esta unidad de fuerza se llama *Poundal*.

En el sistema métrico francés las unidades son un centímetro, un gramo y un segundo. La fuerza que en un segundo comunicaría a un gramo una velocidad de un centímetro en un segundo se llama *Dina*.

Como el pie es 30.4797 centímetros y la libra es 453.59 gramos, el poundal es 13 825.38 dinas.

48. Acción simultánea de fuerzas sobre un cuerpo

Ahora sea que una unidad de fuerza actúa durante la unidad de tiempo sobre la unidad de masa. La velocidad de la masa cambiará y la aceleración total será la unidad en la dirección de la fuerza.

La magnitud y dirección de esta aceleración total serán las mismas, ya sea que el cuerpo esté originalmente en reposo o en movimiento. Pues la expresión "en reposo" no tiene significado científico, y la expresión "en movimiento", si se refiere a movimiento relativo, puede significar cualquier cosa y si se refiere a movimiento absoluto sólo puede referirse a algún medio fijo en el espacio. Descubrir la existencia de un medio y determinar nuestra velocidad con respecto a él por observación del movimiento de cuerpos, es una investigación científica legítima; pero suponiendo que se ha hecho todo esto, habremos descubierto no un error en las leyes del movimiento, sino un hecho nuevo en la ciencia.

Por consiguiente, el efecto de una fuerza dada sobre un cuerpo no depende del movimiento de ese cuerpo.

Tampoco es afectado por la acción simultánea de otras fuerzas sobre el cuerpo. Pues el efecto de estas fuerzas sobre aquél es solamente producir movimiento en él y esto no afecta a la aceleración producida por la primera fuerza.

Por lo tanto, llegamos a la siguiente forma de la ley. *Cuando cualquier número de fuerzas actúan sobre un cuerpo, la aceleración debida a cada fuerza es la misma en dirección y magnitud, como si las otras no estuvieran en acción.*

Cuando una fuerza, constante en dirección y magnitud, actúa sobre un cuerpo, la aceleración total es proporcional al intervalo de tiempo que dura la acción de dicha fuerza.

Pues si la fuerza produce cierta aceleración total en un intervalo de tiempo dado, producirá una aceleración total igual en el siguiente, porque el efecto de la fuerza no depende de la velocidad que tiene el cuerpo cuando la fuerza actúa sobre él. Por consiguiente, en cada intervalo igual de tiempo ha-

brá un cambio igual de velocidad y el cambio total de velocidad desde el principio del movimiento será proporcional al tiempo de acción de la fuerza.

La aceleración total en un tiempo dado es proporcional a la fuerza.

Porque si varias fuerzas iguales actúan en la misma dirección sobre el mismo cuerpo, cada una produce su efecto independientemente de las otras. Por tanto, la aceleración total es proporcional al número de fuerzas iguales.

49. Sobre el impulso

El efecto total de una fuerza al comunicar velocidad a un cuerpo es, por consiguiente, proporcional tanto a la fuerza como al tiempo durante el cual actúa.

Al producto del tiempo de acción de una fuerza por su intensidad si ésta es constante, o por su intensidad media si es variable, se le llama *Impulso* de la fuerza.

Hay ciertos casos en que una fuerza actúa durante un tiempo tan corto, que es difícil estimar su intensidad o el tiempo durante el cual actúa. Pero es comparativamente fácil medir el efecto de la fuerza al alterar el movimiento del cuerpo sobre el que actúa, que como hemos visto, depende del impulso.

La palabra impulso fue usada originalmente para denotar el efecto de una fuerza de corta duración, tal como el de un martillo al golpear a un clavo.

Sin embargo, no hay diferencia esencial entre este caso y cualquier otro caso de la acción de una fuerza. Por consiguiente, usaremos la palabra impulso como se definió anteriormente sin restringirla a casos en que la acción es de un carácter excepcionalmente transitorio.

50. Relación entre fuerza y masa

Si una fuerza actúa sobre una unidad de masa durante cierto intervalo de tiempo, el impulso, como hemos visto, se mide por la velocidad generada.

Si un número de fuerzas iguales actúan en la misma dirección, cada una sobre una unidad de masa, las diferentes masas se moverán en la misma forma, y pueden reunirse en un cuerpo sin alterar el fenómeno. La velocidad del cuerpo en su totalidad es igual a la producida por una de las fuerzas actuando sobre la unidad de masa. Por consiguiente, la fuerza necesaria para producir un cambio dado de velocidad en un cierto tiempo es proporcional al número de unidades de masa de las que el cuerpo está constituido.

51. Sobre el momentum

El valor numérico del momentum de un cuerpo es el producto del número de unidades de masa del cuerpo por el número de unidades de velocidad de su movimiento.

Así el momentum de un cuerpo se mide en términos del momentum de la unidad de masa que se mueve con la unidad de velocidad, lo que se toma como la unidad de momentum.

La dirección del momentum es la misma que la de la velocidad y como la velocidad sólo puede ser estimada con respecto a cierto punto de referencia, el valor particular del momentum depende del punto de referencia que asumimos. El momentum de la luna, por ejemplo, será muy diferente si tomamos la tierra o el sol como punto de referencia.

52. Enunciado de la segunda ley del movimiento en términos de impulso y momentum

El cambio de momentum de un cuerpo es numéricamente igual al impulso que lo produce y es en la misma dirección.

53. Adición de fuerzas

Si cualquier número de fuerzas actúa simultáneamente sobre un cuerpo, cada fuerza produce una aceleración proporcional a su propia magnitud (artículo 48). Por tanto, si en el diagrama de aceleraciones (artículo 34) trazamos desde cualquier origen una línea que represente en dirección y magnitud la aceleración debida a una de las fuerzas y desde el extremo de esta línea otra que represente la aceleración debida a otra fuerza y así sucesivamente, tra-

zando líneas para cada una de las fuerzas tomadas en cualquier orden. Entonces, la línea trazada desde el origen hasta la extremidad de la última línea representará la aceleración debida a la acción combinada de todas las fuerzas.

Como en este diagrama las líneas que representan las aceleraciones están en la misma proporción que las fuerzas a las que se deben aquéllas, podemos considerar a las líneas como representando a estas mismas fuerzas. El diagrama así entendido, puede llamarse un Diagrama de Fuerzas y la línea desde el origen hasta la extremidad de la serie representa a la Fuerza Resultante.

Un caso importante es aquel en que el conjunto de líneas que representan a las fuerzas termina en el origen, de modo que forma una figura cerrada. En este caso no hay fuerza resultante y no existe aceleración. Los efectos de las fuerzas son balanceados exactamente y el caso es de equilibrio. El estudio de los casos de equilibrio es la materia de la ciencia de la Estática.

Es manifiesto que, como el sistema de fuerzas está exactamente balanceado, no es equivalente a fuerza alguna, las fuerzas también estarán balanceadas si actúan en la misma forma sobre cualquier otro sistema material, cualquiera que sea la masa de ese sistema. Esta es la razón por la que la masa no se considera en investigaciones estáticas.

54. La tercera ley del movimento

LEY III. *La reacción es siempre igual y opuesta a la acción, o sea, que las acciones de dos cuerpos entre sí son siempre iguales y en direcciones opuestas.*

Cuando los cuerpos entre los cuales tiene lugar la acción no son influidos por ninguna otra fuerza, los cambios en sus respectivos momenta producidos por la acción son iguales y en direcciones opuestas.

Los cambios en las velocidades de los dos cuerpos son también en direcciones opuestas, pero no iguales, excepto en el caso de masas iguales. En otros casos los cambios de velocidad son en razón inversa de las masas.

55. Acción y reacción son aspectos parciales de un esfuerzo

Ya hemos usado (Artículo 37) la palabra Esfuerzo para denotar la acción mutua entre dos porciones de materia. Esta palabra se tomó prestada del lenguaje común y fue investida de un preciso significado científico por el finado profesor Rankine, a quien debemos otros valiosos términos científicos.

Tan pronto como nos hemos formado la idea de un esfuerzo, tal como la Tensión de una cuerda o la Presión entre dos cuerpos y hemos reconocido

su doble aspecto en lo que afecta a las dos porciones de materia entre las que actúa, la tercera ley del movimiento es equivalente al enunciado de que toda fuerza es de la naturaleza del esfuerzo, que el esfuerzo existe solamente entre dos porciones de materia y que sus efectos sobre estas porciones de materia (medidos por el momentum generado en un tiempo dado) son iguales y opuestos.

El esfuerzo se mide numéricamente por la fuerza ejercida sobre cualquiera de las dos porciones de materia. Se distingue como una tensión cuando la fuerza que actúa sobre cualquier porción lo hace hacia la otra y como una presión cuando la fuerza que actúa sobre cualquier porción lo hace alejándose de la otra.

Cuando la fuerza está inclinada respecto a la superficie que separa a las dos porciones de materia, el esfuerzo no puede designarse con ningún término del lenguaje ordinario, sino que debe ser definido por términos técnicos matemáticos.

Cuando una tensión se ejerce entre dos cuerpos mediante una cuerda, el esfuerzo, propiamente hablando, es entre dos partes cualesquiera en las que la cuerda puede suponerse dividida por una sección imaginaria o plano transversal. No obstante, si despreciamos el peso de la cuerda, cada porción de ella está en equilibrio bajo la acción de las tensiones en sus extremidades, por lo que las tensiones en dos planos transversales cualesquiera de la cuerda

deben ser iguales. Por esta razón, frecuentemente hablamos de la tensión de la cuerda como un todo, sin especificar alguna sección particular de ella y también de la tensión entre los dos cuerpos, sin considerar la naturaleza de la cuerda a través de la cual se ejerce la tensión.

56. Atracción y repulsión

Existen otros casos en que dos cuerpos a distancia aparecen actuando mutuamente entre sí, aunque no podamos detectar ningún cuerpo intermedio, como la cuerda del ejemplo anterior, a través del cual tiene lugar la acción. Por ejemplo, dos imanes o dos cuerpos electrizados aparecen actuando entre sí cuando están separados una considerable distancia y los movimientos de los cuerpos celestes son observados como afectados en una manera que depende de su posición relativa.

Esta acción mutua entre cuerpos distantes se llama atracción cuando tiende a aproximarlos y repulsión cuando tiende a separarlos.

En todos los casos, sin embargo, la acción y reacción entre los cuerpos son iguales y opuestas.

57. La tercera ley, verdadera para la acción a distancia

El hecho de que el imán atrae al hierro hacia sí fue notado por los antiguos, pero no se prestó atención a la fuerza con que el hierro atrae al imán.

Empero, Newton colocó el imán en un recipiente y el hierro en otro, flotando ambos recipientes en agua de modo que se tocaran, mostrando así experimentalmente que como ningún recipiente podía impulsar al otro en el agua, la atracción del hierro sobre el imán debía ser igual y opuesta a la del imán sobre el hierro, siendo ambas atracciones iguales a la presión entre los dos recipientes.

Habiendo dado esta ilustración experimental, Newton pasa a señalar la consecuencia de negar la verdad de esta ley. Por ejemplo, si la atracción de cualquier parte de la tierra, digamos una montaña, sobre el resto de la tierra fuera mayor o menor que la del resto de la tierra sobre la montaña, habría una fuerza residual actuando sobre el sistema de la tierra y la montaña como un todo, lo cual causaría que éste se moviera, con velocidad siempre creciente, a través del espacio infinito.

58. La prueba no experimental de Newton

Esto es contrario a la primera ley del movimiento, la cual afirma que un cuerpo no cambia su estado de movimiento a menos que sobre él se ejerza una fuerza *externa*. No se puede afirmar que sea contrario a la experiencia, pues el efecto de una desigualdad entre la atracción de la tierra sobre la montaña y de la montaña sobre la tierra, sería el mismo que el de una fuerza igual a la diferencia de estas atracciones actuando en la dirección de la línea que une al centro de la tierra con la montaña.

Si la montaña estuviera en el ecuador, la tierra podría girar alrededor de un eje paralelo al eje alrededor del cual giraría de otro modo, pero sin pasar exactamente por el centro de la masa de la tierra.

Si la montaña estuviera en uno de los polos, la fuerza constante paralela al eje de la tierra causaría que la órbita de la tierra alrededor del sol se desplazara ligeramente hacia el norte o al sur de un plano que pasara por el centro de la masa del sol.

Si la montaña estuviera en cualquiera otra parte de la superficie terrestre, su efecto sería parcialmente de una clase y parcialmente de la otra.

Ninguno de estos efectos a menos que fueran muy grandes, podría ser detectado mediante observaciones astronómicas directas y el método indirecto para detectar fuerzas pequeñas, por su efecto al alterar lentamente los elementos de la órbita de un planeta, presupone que la ley de la gravitación es considerada como verdadera. Probar las leyes del movimiento por medio de la ley de la gravitación sería una inversión del orden científico. Eso sería tanto como demostrar la ley de la adición de los números mediante el cálculo diferencial.

Por consiguiente, no podemos considerar el enunciado de Newton como una apelación a la experiencia y la observación, sino más bien como una deducción de la tercera ley del movimiento a partir de la primera.

CAPITULO IV

SOBRE LAS PROPIEDADES DEL CENTRO DE MASA DE UN SISTEMA MATERIAL

59. Definición de un vector-masa

Hemos visto que un vector representa la operación de llevar un punto trazante desde un origen hasta un punto dado.

Definamos un vector-masa como la operación de llevar una masa dada del origen hasta el punto dado. La dirección del vector-masa es la misma que la del vector de la masa, pero su magnitud es el producto de la masa por el vector de la masa.

Así, si $\overline{OA}$ es el vector de la masa A, el vector masa es $\overline{OA} \cdot A$.

60. Centro de masa de dos partículas

Si A y B son dos masas y si se toma un punto C en la recta $\overline{AB}$, de modo que $\overline{BC}$ sea a $\overline{CA}$ como A es a B, entonces el vector-masa de una masa $A + B$ colocada en C es igual a la suma de los vectores-masa de A y B. Pues $\overline{OA} \cdot A + \overline{OB} \cdot B = (\overline{OC} + \overline{CA})\ A + (\overline{OC} + \overline{CB})\ B = \overline{OC}\ (A + B) + \overline{CA} \cdot A + \overline{CB} \cdot B$.

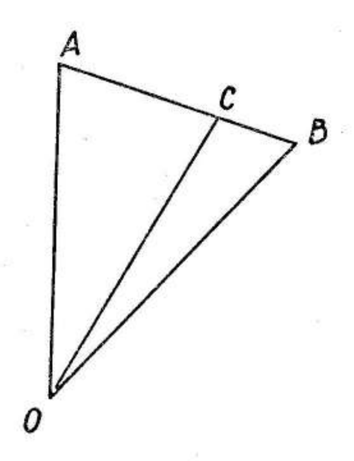


Figura 7

Ahora bien, los vectores-masa $\overline{CA} \cdot A$ y $\overline{CB} \cdot B$ son iguales y opuestos por lo cual se anulan de modo que

$$\overline{OA} \cdot A + \overline{OB} \cdot B = \overline{OC} \ (A + B)$$

o sea, C es un punto tal que si las masas de A y B estuvieran concentradas en C, su vector-masa desde cualquier origen O sería el mismo que cuando A y B están en sus posiciones reales. El punto C se llama *Centro de Masa* de A y B.

61. Centro de masa de un sistema

Si el sistema consiste de un número cualquiera de partículas podemos empezar por encontrar el centro de masa de dos partículas cualesquiera y sustituir las dos partículas por una partícula igual a la suma de ellas colocada en su centro de masa. Podemos encontrar entonces el centro de masa, de esta partícula, junto con la tercera partícula del sistema y colocar la suma de las tres partículas en este punto y así sucesivamente hasta que hayamos encontrado el centro de masa del sistema total.

El vector-masa trazado desde cualquier origen hasta una masa igual a la de todo el sistema colocado en el centro de masa del sistema es igual a la suma de los vectores-masa trazados desde el mismo origen hasta todas las partículas del sistema.

Se sigue, de la prueba del Artículo 60, que el punto encontrado mediante la construcción aquí dada satisface esta condición. Es claro, por la condición misma, que solamente un punto puede satisfacerla. Por consiguiente la construcción debe conducir al mismo resultado, en cuanto a la posición del centro de masa, en cualquier orden en que tomemos las partículas del sistema.

El centro de masa es, por consiguiente, un punto definido en el diagrama de la configuración del sistema. Asignando a los diferentes puntos de los diagramas de desplazamiento, velocidad, aceleración total y razón de aceleración, las masas de los cuerpos a los que corresponden, podemos encontrar en cada uno de estos diagramas un punto que corresponde al centro de masa y que indica el desplazamiento, velocidad, aceleración total, o razón de aceleración del centro de masa.

62. El momentum representado como la razón de cambio de un vector-masa

En el diagrama de velocidades, si los puntos o, a, b, c, corresponden a las velocidades del origen O y de los cuerpos A, B, C y si p es el centro de masa de A y B colocados en a y b respectivamente y si q es el centro de masa de A + B colocado en p y C en c, entonces q será el centro de masa del sistema de cuerpos A, B, C, en a, b, c, respectivamente.

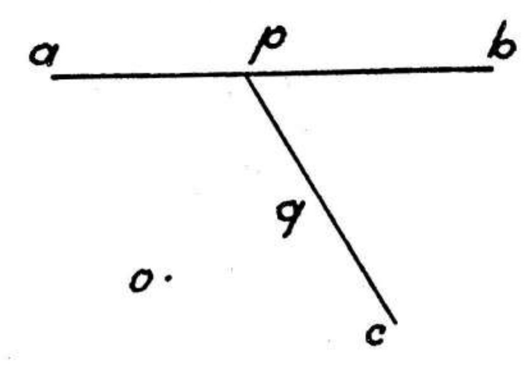


Figura 8

La velocidad de A con respecto a O es indicada por el vector $\overline{oa}$ y la de B y C por $\overline{ob}$ y $\overline{oc}$; $\overline{op}$ es la velocidad del centro de masa de A y B y $\overline{oq}$ la del centro de masa de A, B y C, con respecto a O.

El momentum de A con respecto a O es el producto de la velocidad por la masa, o sea $\overline{oa}$. A, que es lo que hemos llamado el vector-masa, trazado desde o hasta la masa A en a. Análogamente, el momentum de cualquier otro cuerpo es el vector-masa trazado desde o hasta el punto del diagrama de velocidades correspondiente a ese cuerpo y el momentum de la masa del sistema concentrado en el centro de masa es el vector-masa trazado desde o hasta la masa total en q.

Por consiguiente, como un vector-masa del diagrama de velocidades es lo que ya hemos definido como un momentum, podemos enunciar la propiedad demostrada en el Artículo 61 en términos de momenta, así: El momentum de una masa igual a la de todo el sistema, moviéndose con la velocidad del centro de masa del sistema, es igual en magnitud y paralelo en dirección a la suma de los momenta de todas las partículas del sistema.

63. Efecto de fuerzas externas sobre el movimiento del centro de masa

Del mismo modo, en el diagrama de Aceleración Total los vectores $\overline{\omega\alpha}$, $\overline{\omega\beta}$ etc., trazados desde el origen, representan el cambio de velocidad de los cuerpos A, B, etc., durante un cierto intervalo de tiempo. Los vectores-masa correspondientes, $\overline{\omega\alpha}$. A, $\overline{\omega\beta}$. B, etc., representan los cambios de momentum correspondientes, o, por la segunda ley del movimiento, los impulsos de las fuerzas que actúan sobre estos cuerpos durante ese intervalo de tiempo. Si k es el centro de masa del sistema $\overline{\omega k}$ es el cambio de velocidad durante el intervalo y $\overline{\omega k}$ (A + B + C) es el

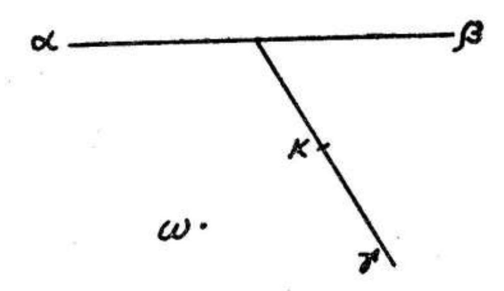


Figura 9

momentum generado en la masa concentrada en el centro de gravedad. Por tanto, según el Artículo 61, el cambio de momentum de la masa imaginaria igual a la de todo el sistema concentrado en el centro de masa, es igual a la suma de los cambios de mometum de todos los diferentes cuerpos del sistema.

En virtud de la segunda ley del movimiento podemos poner este resultado en la forma siguiente:

El efecto de las fuerzas que actúan sobre los diferentes cuerpos del sistema al alterar el movimiento del centro de masa del sistema, es el mismo que si todas estas fuerzas se hubieran aplicado a una masa igual a toda la masa del sistema y coincidiendo con su centro de masa.

64. El movimiento del centro de masa de un sistema, no es afectado por la acción mutua entre las partes del sistema

Pues si hay una acción entre dos partes del sistema, digamos A y B, la acción de A sobre B es

siempre, por la tercera ley del movimiento, igual y opuesta a la reacción de B sobre A. El momentum generado en B por la acción de A durante cualquier intervalo es, por consiguiente, igual y opuesto al generado en A por la reacción de B durante el mismo intervalo y el movimiento del centro de masa de A y B, en consecuencia, no es afectado por su acción mutua.

Podemos aplicar el resultado del último artículo a este caso y decir que, como las fuerzas sobre A y sobre B que se originan por su acción mutua son iguales y opuestas y como el efecto de estas fuerzas sobre el movimiento del centro de masa del sistema es el mismo que si hubieran sido aplicadas a una partícula cuya masa sea igual a toda la masa del sistema y como el efecto de dos fuerzas iguales y opuestas entre sí es cero, el movimiento del centro de masa no será afectado.

65. Primera y segunda leyes del movimiento

Este es un resultado muy importante. Nos permite hacer más precisa la enunciación de la primera y segunda leyes del movimiento, al definir que se entiende por velocidad de un cuerpo la velocidad de su centro de masa. El cuerpo puede estar girando, o puede consistir de partes y ser capaz de cambiar de configuración, de modo que los movimientos de partes diferentes puedan ser diferentes, aunque de to-

dos modos podemos formular las leyes del movimiento en la siguiente forma:

Ley I. El centro de masa del sistema persevera en su estado de reposo, o de movimiento uniforme en una línea recta, excepto en cuanto se hace cambiar ese estado por fuerzas que actúan sobre el sistema desde fuera.

Ley II. El cambio de momentum del sistema durante cualquier intervalo de tiempo se mide por la suma de los impulsos de las fuerzas externas durante ese intervalo.

66. MÉTODO DE TRATAMIENTO DE SISTEMAS DE MOLÉCULAS

Cuando el sistema está constituido de partes tan pequeñas que no es posible observarlas y cuyos movimientos son tan rápidos y tan variables, que aún observándolas no serían suceptibles de descripción, aún podemos tratar el movimiento del centro de masa del sistema, porque las fuerzas internas que causan la variación del movimiento de las partes no afectan al movimiento del centro de masa.

67. DE LA INTRODUCCIÓN DE LA IDEA DE MASA, PASAMOS DE VECTORES-PUNTO, DESPLAZAMIENTOS PUNTO, VELOCIDADES, ACELERACIONES TOTALES, Y RAZONES DE ACELERACIÓN, A VECTORES MASA, DESPLAZAMIENTOS-MASA, MOMENTA, IMPULSOS Y FUERZAS MOTRICES.

En el diagrama de razones de aceleración (Fig. 9, Artículo 63) los vectores $\overline{\omega\alpha}$, $\overline{\omega\beta}$, etc., trazados desde el origen, representan las razones de aceleración de los cuerpos A, B, etc., en un instante dado, con respecto a la del origen O.

Los vectores-masa correspondientes, $\overline{\omega\alpha} \,.\, A$, $\overline{\omega\beta} \,.\, B$, etc., representan las fuerzas que actúan sobre los cuerpos A, B, etc.

A veces hablamos de varias fuerzas actuando sobre un cuerpo, cuando la fuerza que actúa sobre el cuerpo se origina de varias causas diferentes, tal que consideramos natural que las partes de la fuerza se originan de estas causas diferentes separadamente.

Pero cuando consideramos la fuerza, no con respecto a sus causas, sino con respecto a su efecto (el de alterar el movimiento de un cuerpo) no hablamos de las fuerzas, sino de la fuerza que actúa sobre el cuerpo y esta fuerza es medida por la razón de cambio del momentum del cuerpo y es indicada por el vector-masa en el diagrama de razones de aceleración.

Tenemos así una serie de diferentes clases de vectores-masa correspondiente a la serie de vectores que ya hemos estudiado.

Tenemos, en primer lugar, un sistema de vectores-masa con un origen común, al que podemos considerar como un método para indicar la distribución de masa en un sistema material, precisamente

como el sistema de vectores correspondiente indica la configuración geométrica del sistema.

En segundo lugar, comparando la distribución de masa en dos épocas diferentes, obtenemos un sistema de vectores-masa de desplazamiento.

La razón de desplazamiento de masa es momentum, precisamente como la razón de desplazamiento es velocidad.

El cambio de momentum es impulso, tal como el cambio de velocidad es aceleración total.

La razón de cambio de momentum es fuerza motriz, tal como la razón de cambio de velocidad es razón de aceleración.

68. Definición de un área-masa

Cuando una partícula material se mueve de un punto a otro, el doble del área barrida por el vector de la partícula multiplicado por la masa de la misma, se llama el área-masa del desplazamiento de la partícula con respecto al origen desde el cual se traza el vector.

Si el área está en un plano, la dirección del área-masa es normal al plano, trazada de modo que, mirando en dirección positiva a lo largo de la normal, el movimiento de la partícula alrededor de su área aparece en la dirección del movimiento de las manecillas del reloj.

Si el área no está en un plano, la trayectoria de la partícula debe dividirse en porciones tan pequeñas que cada una coincida sensiblemente con una línea recta y las áreas-masa correspondientes a estas porciones deben sumarse de acuerdo con la regla de adición de vectores.

69. Momentum angular

La razón de cambio de un área-masa es el doble de la masa de la partícula por el triángulo cuyo vértice es el origen y cuya base es la velocidad de la partícula medida a lo largo de la línea que pasa por la partícula en la dirección de su movimiento. La dirección de esta área-masa es indicada por la normal trazada de acuerdo con la regla dada anteriormente.

La razón de cambio del área-masa de una partícula se llama el momentum angular de la partícula alrededor del origen y la suma de los momenta angulares de todas las partículas se llama el momentum angular del sistema alrededor del origen.

El momentum angular de un sistema material con respecto a un punto es, por consiguiente, una cantidad que tiene una dirección definida así como una magnitud definida.

La definición del momentum angular de una partícula alrededor de un punto puede expresarse, en forma algo diferente, como el producto del momentum de la partícula con respecto a ese punto por la

perpendicular desde ese punto a la línea de movimiento de la partícula en ese instante.

70. Momento de una fuerza alrededor de un punto

La razón de incremento del momentum angular de una partícula es el producto de la razón de aceleración de la velocidad de la partícula por la masa de la partícula por la perpendicular desde el origen a la línea que pasa por la partícula y a lo largo de la cual tiene lugar la aceleración. En otras palabras, es el producto de la fuerza motriz que actúa sobre la partícula por la perpendicular desde el origen sobre la línea de acción de esta fuerza.

Ahora bien, el producto de una fuerza por la perpendicular desde el origen, sobre su línea de acción, se llama el Momento de la fuerza alrededor del origen. El eje del momento, que indica su dirección, es un vector trazado perpendicularmente al plano que pasa por la fuerza y el origen y en una dirección tal que, mirando a lo largo de esta línea en la dirección en que es trazada, la fuerza tiende a mover la partícula alrededor del origen en la dirección de las manecillas del reloj.

Por tanto, la razón de cambio del momentum angular de una partícula alrededor del origen se mide por el momento de la fuerza que actúa sobre la partícula alrededor de ese punto.

La razón de cambio del momentum angular de un sistema material alrededor del origen se mide, de manera semejante, por la suma geométrica de los momentos de las fuerzas que actúan sobre las partículas del sistema.

71. Conservación del momentum angular

Ahora considérense dos partículas cualesquiera del sistema. Las fuerzas que actúan sobre estas dos partículas, originadas en su acción mutua, son iguales, opuestas y en la misma línea recta. Por tanto, los momentos de estas fuerzas alrededor de cualquier punto como origen son iguales, opuestos y alrededor del mismo eje. La suma de estos momentos, por consiguiente, es cero. De manera semejante, la acción mutua entre cualquier otro par de partículas del sistema consiste de dos fuerzas, la suma de cuyos momentos es cero.

Por tanto, la acción mutua entre los cuerpos de un sistema material no afecta a la suma geométrica de los momentos de las fuerzas. Por consiguiente, las únicas fuerzas que es necesario considerar al encontrar la suma geométrica de los momentos son aquellas que son externas al sistema; es decir, entre el todo o cualquier parte del sistema y cuerpos no incluidos en el sistema.

La razón de cambio del momentum angular del sistema, por consiguiente, se mide por la suma geo-

métrica de los momentos de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema.

Si las direcciones de todas las fuerzas externas pasan por el origen, sus momentos son cero y el momentum angular del sistema permanecerá constante.

Cuando un planeta describe una órbita alrededor del sol, la dirección de la acción mutua entre los dos cuerpos siempre pasa por su centro de masa común. Por tanto, el momentum angular de uno u otro cuerpo alrededor de su centro de masa común permanece constante, hasta donde concierne únicamente a estos dos cuerpos, aunque ese momento puede ser afectado por la acción de otros planetas. No obstante, si incluimos a todos los planetas del sistema, la suma geométrica de sus momenta angulares alrededor de su centro de masa común permanecerá absolutamente constante, cualesquiera que puedan ser sus acciones mutuas, siempre que ninguna fuerza originada en cuerpos externos a la totalidad del sistema solar actúe en forma desigual sobre los diferentes miembros del sistema.

CAPÍTULO V

SOBRE EL TRABAJO Y LA ENERGIA

72. DEFINICIONES

TRABAJO *es el acto de producir un cambio de configuración en un sistema en oposición a una fuerza que resiste a ese cambio.*

ENERGIA *es la capacidad de efectuar trabajo.*

Cuando la naturaleza de un sistema material es tal que si, después que el sistema ha sufrido cualquier serie de cambios, es regresado de cualquier modo a su estado original, el trabajo total hecho por agentes externos sobre el sistema es igual al trabajo total hecho por el sistema al vencer las fuerzas externas y el sistema se llama SISTEMA CONSERVATIVO.

73. PRINCIPIO DE LA CONSERVACION DE LA ENERGIA

El progreso de la ciencia física ha conducido al descubrimiento y la investigación de diferentes formas de energía y al establecimiento de la doctrina de que todos los sistemas materiales pueden ser considerados como sistemas conservativos, *siempre que*

se tomen en cuenta todas las diferentes formas de energía que existen en estos sistemas.

Esta doctrina, considerada como una deducción de la observación y el experimento, sólo puede afirmar, por supuesto, que hasta ahora no se ha descubierto ningún caso de un sistema no-conservativo.

En tanto que doctrina científica o productora de ciencia, no obstante, siempre está adquiriendo mayor verosimilitud por el número constantemente creciente de deducciones que se han sacado de ella y que en todos los casos se encuentran verificadas experimentalmente.

De hecho, la doctrina de la Conservación de la Energía es el enunciado generalizado que se encuentra consistente con la realidad, no sólo en la ciencia física, sino en todas las ciencias exactas.

Una vez que se ha entendido esta doctrina, proporciona al investigador físico un principio en el que puede apoyar toda ley conocida en relación con acciones físicas y mediante el cual puede encaminarse para descubrir las relaciones de tales acciones en nuevas ramas de la ciencia.

Por dichas razones la doctrina se llama comúnmente Principio de la Conservación de la Energía.

74. Enunciado general del principio de la conservación de la energía

La energía total de cualquier sistema material es una cantidad que no puede ser aumentada ni disminuida por ninguna acción entre las partes del sistema, aunque puede ser transformada en cualquiera de las formas en las que la energía es susceptible de hacerlo.

Si, por la acción de algún agente externo al sistema, se cambia la configuración de éste, mientras las fuerzas del mismo resisten este cambio de configuración, se dice que el agente externo efectúa trabajo sobre el sistema. En este caso la energía del sistema es aumentada por la cantidad de trabajo efectuado sobre él por el agente externo.

Si, al contrario, las fuerzas del sistema producen un cambio de configuración que es resistido por el agente externo, se dice que el sistema trabaja sobre el agente externo y la energía del sistema es disminuida por la cantidad de trabajo que efectúa.

El trabajo, por consiguiente, es una transferencia de energía de un sistema a otro; se dice que el sistema que da energía trabaja sobre el sistema que la recibe y la cantidad de energía dada por el primer sistema es siempre exactamente igual a la recibida por el segundo.

Por consiguiente, si incluimos ambos sistemas en otro mayor, la energía del sistema total no es aumentada ni disminuida por la acción de un sistema parcial sobre el otro.

75. Medición del trabajo

El trabajo efectuado por un agente externo so-

bre un sistema material puede ser descrito como un cambio en la configuración del sistema, que tenga lugar bajo la acción de una fuerza externa que tiende a producir ese cambio.

Así, si una libra es elevada un pie del suelo por un hombre en oposición a la fuerza de gravedad, una cierta cantidad de trabajo es efectuada por el hombre y esta cantidad es conocida entre los ingenieros como una libra-pie.

Aquí el hombre es el agente externo, el sistema material consiste de la tierra y la libra, el cambio de configuración es el aumento de la distancia entre la materia de la tierra y la materia de la libra y la fuerza es la fuerza hacia arriba ejercida por el hombre al elevar la libra, la que es igual y opuesta al peso de la libra. Elevar la libra un pie más alto, si la gravedad fuera una fuerza uniforme, requeriría exactamente la misma cantidad de trabajo. Es verdad que la gravedad no es realmente uniforme, sino que disminuye según ascendemos desde la superficie de la tierra, por lo que una libra-pie no es una cantidad conocida con precisión, a menos que especifiquemos la intensidad de la gravedad en el lugar. Pero para el propósito de ilustración podemos asumir que la gravedad es uniforme para unos pocos pies de ascenso y en ese caso el trabajo hecho al elevar una libra sería de una libra-pie por cada pie que la libra se eleve.

Levantar veinte libras de agua a diez pies de altura requiere 200 libras-pie de trabajo. Levantar una

libra a diez pies de altura requiere diez libras-pie y como hay veinte libras, el trabajo completo es veinte veces mayor, o sea doscientas libras-pie.

La cantidad de trabajo hecho es, por consiguiente, proporcional al producto de los números que representan a la fuerza ejercida y al desplazamiento en la dirección de la fuerza.

En el caso de una libra-pie la fuerza es el peso de una libra, una cantidad que, como sabemos, es diferente según el lugar. El peso de una libra expresado en medida absoluta es numéricamente igual a la intensidad de la gravedad, siendo denotada la cantidad por g, cuyo valor en poundals por libra varía de 32.227 en los polos a 32.117 en el ecuador y disminuye sin límite según nos alejemos de la tierra. En dinas por gramo varía de 978.1 a 983.1. Por tanto, para expresar el trabajo de manera uniforme y congruente, debemos multiplicar el número de libras-pie por el número que representa la intensidad de la gravedad en el lugar. El trabajo se reduce así a poundals-pie. Entenderemos siempre el trabajo medido de esta manera y calculado en poundals-pie cuando no se mencione otro sistema de medición. Cuando el trabajo se expresa en libras-pie el sistema es el de *medidas-gravitación,* que no es un sistema completo a menos que conozcamos también la intensidad de la gravedad en el lugar.

En el sistema métrico la unidad de trabajo es el Erg, que es el trabajo efectuado por una dina ac-

tuando a lo largo de un centímetro. Hay 421393.8 erg en un poundal-pie.

76. Energía potencial

El trabajo hecho por un hombre al levantar un cuerpo pesado es efectuado venciendo la atracción entre la tierra y ese cuerpo. La energía del sistema material, que consiste de la tierra y el cuerpo pesado, es así aumentada. Si el cuerpo pesado es el contrapeso de un reloj, la energía de éste es aumentada al darle cuerda, de modo que el reloj puede funcionar durante una semana a pesar de la fricción de los engranes y la resistencia del aire al movimiento del péndulo y también dar energía en otras formas, como la comunicación de las vibraciones al aire, por lo cual podemos oir el tictac del reloj.

Cuando un hombre le da cuerda a un reloj hace trabajo al cambiar la forma del muelle real enrollándolo. La energía del muelle se aumenta así, de modo que al desenrollarse puede mantener el reloj en movimiento.

En estos dos casos la energía comunicada al sistema depende de un cambio de configuración.

77. Energía cinética

Pero en una muy importante clase de fenómenos el trabajo se efectúa al cambiar la velocidad del

cuerpo sobre el que actúe. Tomemos como un caso simple el de un cuerpo que se mueve sin rotación bajo la acción de una fuerza. Sea la masa del cuerpo M libras y sea una fuerza de F poundals que actúa sobre él en la línea del movimiento durante un intervalo de tiempo, T segundos. Sea la velocidad al principio del intervalo V y la velocidad al fin de él, V' pies en un segundo y sea S pies la distancia recorrida por el cuerpo durante el tiempo. El momentum original es MV y el momentum final es MV', por lo que el incremento de momentum es M(V' — V) y esto, de acuerdo con la segunda ley del movimiento, es igual a FT, el *impulso* de la fuerza F que actúa durante el tiempo T. Por tanto:

$$FT = M\,(V' - V) \qquad (1)$$

Como la velocidad aumenta uniformemente con el tiempo [cuando la fuerza es constante], la velocidad media es la media aritmética de las velocidades inicial y final, $\frac{1}{2}(V' + V)$.

También podemos determinar la velocidad media dividiendo el espacio S entre el tiempo T, durante el cual aquél es recorrido. Por tanto:

$$\frac{S}{T} = \frac{1}{2}\,(V' + V) \qquad (2)$$

Multiplicando entre sí los miembros correspondientes de las ecuaciones (1) y (2) obtenemos:

$$FS = \frac{1}{2}MV'^2 - \frac{1}{2}MV^2 \qquad (3)$$

Aquí FS es el trabajo hecho por la fuerza F que actúa sobre el cuerpo mientras éste se mueve a través del espacio S en la dirección de aquélla y esto es igual al exceso de $\frac{1}{2}MV'^2$ con respecto a $\frac{1}{2}MV^2$. Si llamamos a $\frac{1}{2}MV^2$, o sea el semiproducto de la masa por el cuadrado de la velocidad, la *energía cinética* del cuerpo al principio, entonces $\frac{1}{2}MV'^2$ será la energía cinética después de la acción de la fuerza F a través del espacio S. La energía se expresa aquí en poundals-pie.

Podemos ahora expresar la ecuación en palabras, diciendo que el trabajo hecho por la fuerza F al cambiar el movimiento del cuerpo se mide por el aumento de la energía cinética del cuerpo durante el tiempo en que la fuerza actúa.

Hemos probado que esto es verdadero cuando el intervalo de tiempo es tan pequeño que podemos considerar a la fuerza como constante durante ese tiempo y a la velocidad media durante el intervalo como la media aritmética de las velocidades al principio y al fin del intervalo. Esta hipótesis, que es exactamente verdadera cuando la fuerza es constante, por prolongado que pueda ser el intervalo, se hace en cada caso más cercana a la verdad según que el intervalo de tiempo tomado sea más y más pequeño. Dividiendo el tiempo total de acción en partes pequeñas y probando que en cualquiera de ellas el trabajo efectuado es igual al incremento de la energía cinética del cuerpo, podemos, sumando las porciones sucesivas del trabajo y los incrementos sucesivos de energía, llegar al resultado de que el trabajo total hecho por la fuerza es igual al aumento total de energía cinética.

Si la fuerza actúa sobre el cuerpo en la dirección opuesta a su movimiento, la energía cinética del cuerpo será disminuida en vez de ser aumentada y la fuerza, en vez de efectuar trabajo sobre el cuerpo, actuará como una resistencia, que el cuerpo vence en su movimiento. Por tanto un cuerpo móvil, mientras está en movimiento, puede efectuar trabajo al vencer la resistencia y este trabajo es igual a la disminución de su energía cinética, hasta que al fin, cuando el cuerpo queda en reposo, su energía cinética es agotada y el trabajo total que ha efectuado es entonces igual a la energía cinética total que tenía al principio.

Vemos ahora lo apropiado del nombre *energía cinética,* que hemos usado hasta ahora simplemente como un nombre para denotar al producto

$$\frac{1}{2} MV^2.$$

Pues la energía de un cuerpo se ha definido como la capacidad que tiene para hacer trabajo y se mide por el trabajo que puede hacer. La energía *cinética* de un cuerpo es la energía que tiene en virtud de estar en *movimiento* y ya hemos mostrado que su valor es expresado por

$$\frac{1}{2} MV^2 \text{ o } \frac{1}{2} MV \times V,$$

o sea, el semiproducto de su momentum por su velocidad.

78. Fuerzas oblicuas

Si la fuerza actúa sobre el cuerpo en ángulo recto con la dirección de su movimiento, no hace trabajo sobre el cuerpo y altera la dirección pero no la magnitud de la velocidad. Por consiguiente la energía cinética, que depende del cuadrado de la velocidad, permanece inalterable.

Si la dirección de la fuerza no coincide ni está en ángulo recto con el movimiento del cuerpo, podemos representar la fuerza por medio de dos componentes, una de las cuales está en ángulo recto con la dirección del movimiento, mientras que la otra está en la dirección del movimiento (o en la dirección opuesta).

La primera de estas componentes puede omitirse en todos los cálculos de energía, ya que no hace trabajo sobre el cuerpo ni altera su energía cinética.

La segunda componente es la que ya hemos considerado. Cuando está en la dirección del movimiento aumenta la energía cinética del cuerpo en la cantidad de trabajo que efectúa sobre él. Cuando está en la dirección opuesta la energía cinética del cuerpo es diminuida en la cantidad de trabajo que el cuerpo efectúa contra la fuerza.

Por tanto, en todos los casos el aumento de energía cinética es igual al trabajo hecho sobre el cuerpo por el agente externo y la disminución de energía cinética es igual al trabajo hecho por el cuerpo contra la resistencia externa.

79. Energía cinética de dos partículas referida a su centro de masa

La energía cinética de un sistema material es igual a la energía cinética de una masa igual a la del sistema que se mueve con la velocidad del centro de masa del mismo, más la energía cinética debida al movimiento de las partes del sistema con relación a su centro de masa.

Empecemos con el caso de dos partículas cuyas masas son A y B y cuyas velocidades son representadas en el diagrama de velocidades por las líneas oa y ob. Si c es el centro de masa de una partícula igual a A colocada en a y una partícula igual a B

colocada en b, entonces oc representará a la velocidad del centro de masa de las dos partículas.

La energía cinética del sistema es la suma de las energías cinéticas de las partículas, o sea:

$$T = \frac{1}{2} Aoa^2 + \frac{1}{2} Bob^2.$$

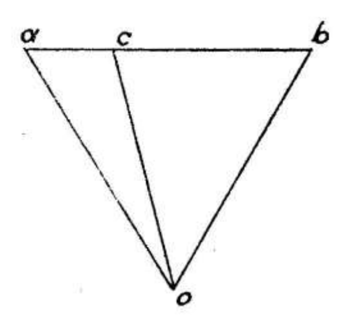


Figura 10

Expresando oa^2 y ob^2 en términos de oc, ca y cb, y el ángulo oca $= \theta$,

$$T = \frac{1}{2} Aoc^2 + \frac{1}{2} Aca^2 - Aoc \cdot ca \cos \theta +$$

$$+ \frac{1}{2} Boc^2 + \frac{1}{2} Bcb^2 - Boc \cdot cb \cos \theta.$$

Pero como c es el centro de masa de A en a y B en b,

$$Aca + Bcb = 0.$$

Por consiguiente, sumando:

$$T = \frac{1}{2} (A + B)\, oc^2 + \frac{1}{2} Aca^2 + \frac{1}{2} Bcb^2,$$

o sea, la energía cinética del sistema de dos partículas A y B es igual a la de una masa (A + B) que se mueve con la velocidad del centro de masa, más la del movimiento de las partículas con relación al centro de masa.

80. Energía cinética de un sistema material referida a su centro de masa

Hemos empezado con el caso de dos partículas, porque se supone que el movimiento de una partícula es el de su centro de masa y hemos probado que nuestra proposición es verdadera para un sistema de dos partículas. Pero si la proposición es verdadera para cada uno de dos sistemas materiales tomados separadamente, debe ser verdadera para el sistema que ellos forman. Pues si suponemos que oa y ob representan a las velocidades de los centros de masa de dos sistemas materiales A y B, entonces oc representará la velocidad del centro de masa del sistema combinado A + B y si T_A representa la energía cinética del movimiento del sistema A con relación a su propio centro de masa y T_B lo mismo para el sistema B, entonces, si la proposición es verdadera para los sistemas A y B tomados separadamente, la energía cinética de A es:

$$\frac{1}{2} Aoa^2 + T_A,$$

y la de B:

$$\frac{1}{2} Bob^2 + T_B.$$

La energía cinética del todo es, por tanto:

$$\frac{1}{2} Aoa^2 + \frac{1}{2} Bob^2 + T_A + T_B$$

o sea:

$$\frac{1}{2} (A + B)\ oc^2 + \frac{1}{2}\ Aca^2 + T_A + \frac{1}{2}\ Bcb^2 + T_B.$$

El primer término representa la energía cinética de una masa igual a la de todo el sistema moviéndose con la velocidad del centro de masa total.

El segundo y tercer términos, tomados juntos, representan la energía cinética del sistema A con relación al centro de gravedad de todo el sistema y el cuarto y quinto términos representan lo mismo para el sistema B.

Por tanto, si la proposición es verdadera para los dos sistemas A y B tomados separadamente, es verdadera para el sistema compuesto por A y B. Pero hemos probado que es verdadera en el caso de dos

partículas; en consecuencia es verdadera para tres, cuatro, o cualquier otro número de partículas y por consiguiente para cualquier sistema material.

La energía cinética de un sistema referida a su centro de masa es menor que su energía cinética referida a cualquier otro punto.

Pues la última cantidad excede a la primera en un valor igual a la energía cinética de una masa igual a la de todo el sistema moviéndose con la velocidad del centro de masa con relación al otro punto y como toda la energía cinética es esencialmente positiva, este exceso debe ser positivo.

81. Energía cinética disponible

Hemos visto en el Artículo 64 que la acción mutua entre las partes de un sistema material no puede cambiar la velocidad del centro de masa del sistema. Por consiguiente, la parte de la energía cinética del sistema que depende del movimiento del centro de masa no puede ser afectada por ninguna acción interna al sistema. En consecuencia es imposible, por medio de la acción mutua de las partes del sistema, convertir esta parte de la energía en trabajo. Hasta donde concierne al sistema mismo, esta energía no es disponible. Puede ser convertida en trabajo sólo mediante la acción entre este sistema y algún otro sistema material externo a él.

Por tanto, si consideramos un sistema material no conectado con ningún otro, su energía cinética

aprovechable es la debida a los movimientos de las partes del sistema con relación a su centro de masa.

Supongamos que la acción entre las partes del sistema es tal que, después de cierto tiempo, la configuración del sistema se hace invariable y llamemos a este proceso la solidificación del sistema. Hemos mostrado que el momentum angular de todo el sistema no cambia por ninguna acción mutua de sus partes. Por consiguiente, si el momentum angular original es cero, el sistema, cuando su forma se hace invariable, no girará alrededor de su centro de masa; pero si se mueve, lo hará como un todo, paralelamente a sí mismo y las partes estarán en reposo con relación al centro de masa. En este caso, por consiguiente, toda la energía disponible será convertida en trabajo por la acción mutua de las partes durante la solidificación del sistema.

Si el sistema tiene momentum angular, tendrá el mismo momentum angular al solidificarse. Por tanto girará alrededor de su centro de masa y por consiguiente aún tendrá energía de movimiento con relación a su centro de masa y esta energía cinética restante no se convierte en trabajo.

Pero si se permite que las partes del sistema se separen una de otra en direcciones perpendiculares al eje del momentum angular del sistema y si el sistema el extenderse así se solidifica, la energía cinética restante de rotación alrededor del centro de masa será cada vez menor mientras mayor sea la

extensión del sistema, de modo que al extender suficientemente el sistema [antes que se solidifique] podemos tomar la energía cinética restante tan pequeña como deseemos, de modo que toda la energía cinética con relación al centro de masa del sistema puede ser convertida en trabajo dentro del sistema.

82. Energía potencial

La energía potencial de un sistema material es la capacidad que tiene de hacer trabajo [sobre otros sistemas], dependiendo de otras circunstancias que no sean el movimiento del sistema. En otras palabras, la energía potencial es la energía que no es cinética.

En el sistema material hipotético que construimos a partir de las ideas fundamentales de materia y movimiento, no hay otras condiciones presentes excepto la configuración y el movimiento de las diferentes masas que constituyen el sistema. Por tanto, en tal sistema las circunstancias de las que la energía debe depender son únicamente el movimiento y la configuración, por lo cual, como la energía cinética depende del movimiento, la energía potencial debe depender de la configuración.

En muchos sistemas materiales reales sabemos que parte de la energía depende de la configuración. Así, el muelle real de un reloj tiene más energía cuan-

do está enrollado totalmente, que cuando lo está parcialmente y dos imanes de barra tienen más energía cuando están lado a lado con sus polos iguales en la misma dirección que cuando sus polos opuestos se encuentran próximos.

83. Elasticidad

En el caso del resorte podemos investigar algo más la conexión entre el enrollado del resorte y la fuerza que éste ejerce concibiéndolo dividido en partes muy pequeñas o elementos. Cuando se enrolla el resorte se altera la forma de cada una de estas pequeñas partes y tal alteración de la forma de un cuerpo sólido se llama Fatiga.

En los cuerpos sólidos la fatiga es acompañada por una fuerza interna o esfuerzo; los cuerpos en que el esfuerzo depende simplemente de la fatiga se llaman Elásticos y la propiedad de ejercer esfuerzo cuando hay fatiga se llama Elasticidad.

Encontramos así que el enrollado del resorte implica la fatiga de sus elementos y que la fuerza externa que ejerce el resorte es la resultante de los esfuerzos de sus elementos.

Así substituimos la relación directa entre el enrollado del resorte y la fuerza que éste ejerce, por una relación entre las fatigas y esfuerzos de los elementos del resorte; es decir, para un solo desplazamiento y una sola fuerza, sustituimos la relación entre ellos que en algunos casos puede ser de naturaleza sumamente complicada, por una multitud de fatigas y un número igual de esfuerzos, estando conectada cada fatiga con su correspondiente esfuerzo por una relación mucho más simple.

Pero después de hacer todo esto, la naturaleza de la conexión entre configuración y fuerza permanece tan misteriosa como siempre. No podemos sino admitir el hecho y si llamamos a todos esos fenómenos, fenómenos de elasticidad, podemos encontrar muy conveniente clasificarlos de este modo, siempre que recordemos que al usar la palabra elasticidad no intentamos explicar la causa de la conexión entre configuración y energía.

84. Acción a distancia

En el caso de los dos imanes no hay substancia visible que conecte a los cuerpos entre los que el esfuerzo existe. El espacio entre los imanes puede ser llenado con aire o con agua, o podemos colocar los imanes en un recipiente y extraer el aire con una bomba, hasta que los imanes queden en lo que se llama comúnmente un vacío y sin embargo la acción mutua de los imanes no se alterará. Incluso podemos poner una placa sólida de vidrio, metal o madera entre los imanes y seguiremos encontrando que su acción mutua depende simplemente de su posición relativa y no es modificada sensiblemente al colocar cualquier substancia entre ellos, a menos que tal sustancia sea uno de los metales magnéticos. Por

consiguiente, se habla comúnmente de la acción entre los imanes como *acción a distancia*.

Se han hecho intentos, con cierto grado de éxito [1] para analizar esta acción a distancia dentro de una distribución continua de esfuerzo en un medio invisible y establecer así una analogía entre la acción magnética y la acción de un resorte o una cuerda al transmitir fuerza; pero el hecho general de que las fatigas o cambios de configuración son acompañados por esfuerzos o fuerzas internas y que de este modo es almacenada la energía en el sistema así fatigado, permanece como un hecho esencial que aún no se ha explicado como resultado de algún principio más fundamental.

85. La teoría de la energía potencial, más complicada que la de la energía cinética

Admitiendo que la energía de un sistema material puede depender de su configuración, el modo en que así depende puede ser mucho más complicado que el modo en que la energía cinética depende del movimiento del sistema. Pues la energía cinética puede calcularse a partir del movimiento de las partes del sistema mediante un método invariable. Multiplicamos la masa de cada parte por la mitad del cuadrado de su velocidad y tomamos la suma de todos estos productos. Pero la energía potencial que surge por la acción mutua de dos partes del sistema puede depender de la posición relativa de las partes en una manera que puede ser distinta en casos diferentes. Así, cuando dos bolas de billar se acercan entre sí cierta distncia no hay acción sensible entre ellas hasta que se aproximan tanto que ciertas partes aparentan estar en contacto. Para acercar aún más los centros de las dos bolas, se debe hacer que cedan las partes en contacto y esto requiere el gasto de trabajo.

Por tanto, en este caso la energía potencial es constante para todas las distancias mayores que la distancia del primer contacto y después aumenta rápidamente al disminuir la distancia.

La fuerza entre dos imanes varía con la distancia de una manera muy diferente y en realidad encontramos que sólo experimentalmente podemos indagar la forma de la relación entre la configuración de un sistema y su energía potencial.

86. Aplicación del método de la energía al cálculo de fuerzas

Un conocimiento completo del modo en que la energía de un sistema material varía cuando la configuración y el movimiento del sistema se hacen variar, es equivalente matemáticamente a un conocimiento de todas las propiedades dinámicas del sistema. Los

[1] Ver de Clerk Maxwell Treatise on Electricity and Magnetism (Tratado sobre Electricidad y Magnetismo). Vol. II, art. 641.

métodos matemáticos por los cuales todas las fuerzas y esfuerzos en un sistema móvil son deducidos de una sola fórmula matemática que expresa la energía como una función de las variables fueron desarrollados por Lagrange, Hamilton y otros eminentes matemáticos; pero sería difícil describirlos siquiera en términos de las ideas elementales a que nos restringimos en este libro. Un esbozo de estos métodos se da en mi tratado sobre *Electricidad*, Parte IV, Capítulo V, Artículo 533 y la aplicación de estos métodos dinámicos a los fenómenos electromagnéticos se da en los capítulos inmediatamente siguientes. *

Pero si consideramos solamente el caso de un sistema en reposo, es fácil ver cómo podemos conocer las fuerzas del sistema cuando sabemos cómo depende su energía respecto de su configuración.

Pues si suponemos que un agente externo al sistema produce un desplazamiento de una configuración a otra, entonces, si en la nueva configuración el sistema posee más energía que la que tenía al principio, puede haber recibido este aumento de energía solamente del agente externo. Este agente, en consecuencia, debe haber efectuado una cantidad de trabajo igual al aumento de energía. Por consiguiente, debe haber fuerza ejercida en la dirección del desplazamiento y el valor medio de esta fuerza, multiplicado por el desplazamiento, debe ser igual al trabajo efectuado. Por tanto, el valor medio de la fuerza puede encontrarse dividiendo el aumento de energía entre el desplazamiento.

Si el desplazamiento es grande esta fuerza puede variar considerablemente durante el mismo, por lo que puede ser difícil calcular su valor medio; pero como la fuerza depende de la configuración, si hacemos el desplazamiento cada vez menor la variación de la fuerza será cada vez menor, de modo que finalmente la fuerza puede ser considerada como sensiblemente constante durante el desplazamiento.

Por consiguiente, si calculamos para una configuración dada la *razón* con la que aumenta la energía con el desplazamiento, con un método semejante al descrito en los Artículos 27, 28 y 33, esta razón será numéricamente igual a la fuerza ejercida por el agente externo en la dirección del desplazamiento.

Si la energía disminuye en vez de aumentar cuando el desplazamiento aumenta, el sistema debe hacer trabajo sobre el agente externo y la fuerza ejercida por éste debe ser en la dirección opuesta a la del desplazamiento.

* Se ha creído conveniente para fines complementarios de información para el lector incluir, en la presente edición española, el capítulo On the Equations of Motion of a connected Sistem. (Sobre las Ecuaciones de Movimiento de un sistema conectado), que es el señalado como referencia por Maxwell (N. de la R.)

87. Especificación del [modo de acción] de las fuerzas

En los tratados de dinámica las fuerzas de que se habla son usualmente las ejercidas por el agente externo sobre el sistema material. En los tratados de electricidad, por otro lado, las fuerzas de que se habla son usualmente las ejercidas por el sistema electrificado contra un agente externo que impide moverse al sistema. Por consiguiente, al leer cualquier enunciado respecto a fuerzas, es necesario averiguar si la fuerza de que se habla debe considerarse desde uno u otro punto de vista.

En general, podemos evitar cualquier ambigüedad viendo el fenómeno en conjunto y hablando de él como un esfuerzo ejercido entre dos puntos o cuerpos y distinguiéndolo como una tensión o una presión, una atracción o una repulsión, de acuerdo con su dirección. Ver el artículo 55.

88. Aplicación a un sistema en movimiento

Aparece así que de un conocimiento de la energía potencial de un sistema en cada configuración posible podemos deducir todas las fuerzas externas que se requieren para mantener al sistema en una configuración [cualquiera dada]. Si el sistema está en reposo y si estas fuerzas externas son las fuerzas reales, el sistema permanecerá en equilibrio.

Si el sistema está en movimiento, la fuerza que actúa sobre cada partícula es la que surge de las conexiones del sistema (igual y opuesta a la fuerza externa justamente calculada), junto con cualquier fuerza externa que pueda ser aplicada a él. Por tanto, un conocimiento completo del modo en que la energía potencial varía con la configuración nos permitiría predecir cada posible movimiento del sistema bajo la acción de fuerzas externas dadas, siempre y cuando fuéramos capaces de vencer las dificultades puramente matemáticas del cálculo.

89. Aplicación del método de la energía a la investigación de cuerpos reales

Cuando pasamos de la dinámica abstracta a la física (de sistemas materiales, cuyas únicas propiedades son las expresadas por sus definiciones, a cuerpos reales, cuyas propiedades tenemos que investigar) encontramos que hay muchos fenómenos que no somos capaces de explicar como cambios en la configuración y el movimiento de un sistema material.

Por supuesto, si empezamos por considerar que los cuerpos reales son sistemas compuestos de materia que concuerda en todos los aspectos con las definiciones que hemos establecido, podemos proseguir con el aserto de que todos los fénomenos son cambios de configuración y movimiento, aunque no es-

temos preparados para definir la clase de configuración y movimiento por los cuales se expliquen los fenómenos particulares. Pero en ciencia exacta esas explicaciones que se aseveran deben ser estimadas no por sus afirmaciones, sino por sus realizaciones. La configuración y el movimiento de un sistema son hechos que pueden ser descritos de manera precisa; por consiguiente, para que la explicación de un fenómeno mediante la configuración y el movimiento de un sistema material pueda admitirse como una adición a nuestro conocimiento científico, deben especificarse las configuraciones, movimientos y fuerzas, mostrando que son congruentes con hechos conocidos así como capaces de explicar el fenómeno.

90. Variables de las que depende la energía

Pero aunque los fenómenos que estamos estudiando no hayan sido aún explicados dinámicamente, podemos usar de modo muy conveniente el principio de la conservación de la energía como una guía para nuestras investigaciones. Al aplicar este principio, asumimos en primer lugar que la cantidad de energía en un sistema material depende del estado de ese sistema, de modo que para un estado dado hay una cantidad definida de energía.

Por tanto, el primer paso es definir los diferentes estados del sistema y cuando tengamos que tratar con cuerpos reales debemos definir su estado no sólo

con respecto a la configuración y el movimiento de sus partes visibles; pero si tenemos razón para sospechar que la configuración y el movimiento de sus partículas invisibles influencian al fenómeno visible, debemos idear algún método para estimar la energía que así surge.

Así, la presión, temperatura, potencial eléctrico y composición química son cantidades variables, cuyos valores sirven para especificar el estado de un cuerpo y en general la energía del cuerpo depende de los valores de estas y otras variables.

91. Energía en términos de las variables

El siguiente paso en nuestra investigación es determinar cuánto trabajo debe hacer la acción externa sobre el cuerpo para hacerlo pasar de un estado a otro.

Para este fin es suficiente conocer el trabajo requerido para hacer que el cuerpo pase de un estado particular, al que podemos llamar *estado normal*, a cualquier otro determinado estado. La energía en el último estado es igual a la del estado normal, junto con el trabajo requerido para llevarla del estado normal al determinado estado. El hecho de que este trabajo es el mismo a través de toda la serie de estados por los que el sistema ha pasado desde el estado normal hasta el determinado estado, es el fundamento de toda la teoría de la energía.

Puesto que todos los fenómenos dependen de las variaciones de la energía del cuerpo y no de su valor total, es innecesario, aun cuando fuera posible, hacer cualquier estimación de la energía del cuerpo en su estado normal.

92. Teoría del calor

Una de las más importantes aplicaciones del principio de la conservación de la energía es a la investigación de la naturaleza del calor.

En un tiempo se suponía que la diferencia entre los estados de un cuerpo cuando está caliente y cuando está frío se debía a la presencia de una substancia llamada *calórico*, que existía en mayor abundancia en el cuerpo cuando estaba caliente que cuando estaba frío. Pero los experimentos de Rumford sobre el calor producido por la fricción de metal y de Davy sobre la fusión de hielo por fricción, mostraron que cuando se gasta trabajo al vencer la fricción, la cantidad de calor producido es proporcional al trabajo gastado.

Los experimentos de Hirn han mostrado también que cuando se hace que el calor trabaje en una máquina de vapor, parte del calor desaparece y que el calor que desaparece es proporcional al trabajo efectuado.

Una medición muy cuidadosa del trabajo gastado en fricción y del calor producido, fue realizado por

Joule, quien encontró que el calor requerido para elevar la temperatura de una libra de agua desde 39° hasta 40°F es equivalente a 772 libras-pie de trabajo en Manchester, o 24,858 poundals-pie.

A partir de esto podemos encontrar que el calor requerido para elevar la temperatura de un gramo de agua desde 3°C hasta 4°C es 42,000,000 de ergs.

93. El calor, una forma de energía

Ahora bien, puesto que el calor puede ser producido, no puede ser una substancia y como siempre que se pierde energía mecánica por fricción hay una producción de calor y siempre que hay una ganancia de energía mecánica en una máquina hay una pérdida de calor y como la cantidad de energía perdida o ganada es proporcional a la cantidad de calor ganado o perdido, concluimos que el calor es una forma de energía.

También tenemos razones para creer que las diminutas partículas de un cuerpo caliente están en un estado de rápida agitación, es decir, que cada partícula está moviéndose siempre muy rápidamente, pero que la dirección de su movimiento se altera tan frecuentemente que avanza poco o nada de una región a otra.

Si este es el caso y, una parte, que puede ser una parte muy grande, de la energía de un cuerpo caliente debe estar en la forma de energía cinética.

Pero para nuestro objetivo actual es innecesario

averiguar en qué forma existe la energía en un cuerpo caliente; el hecho más importante es que la energía puede ser medida en la forma de calor y como toda clase de energía puede ser convertida en calor, esto nos da uno de los métodos más convenientes para medirlo.

94. La energía medida como calor

Así, cuando ciertas substancias son puestas en contacto tienen lugar acciones químicas, las substancias se combinan en una nueva forma y el nuevo grupo de substancias tiene diferentes propiedades químicas que el grupo original de substancias. Durante este proceso puede hacerse trabajo mecánico por la expansión de la mezcla, como cuando se enciende pólvora; como es producida una corriente eléctrica, en la batería voltaica y como es generado calor, en la mayoría de las acciones químicas.

La energía dada en la forma de trabajo mecánico puede medirse directamente, o puede ser transformada en calor por fricción. La energía gastada en producir la corriente eléctrica puede estimarse como calor al hacer que la corriente fluya a través de un conductor de forma tal, que el calor generado en él pueda ser fácilmente medido. Debe tenerse cuidado de que ninguna energía se transmita a una distancia en la forma de sonido o calor radiante sin que sea tomada en cuenta debidamente.

La energía restante en la mezcla, junto con la energía que ha escapado, deben ser iguales a la energía original.

Andrews, Favre y Silbermann, [Julius Thomsen] y otros, han medido la cantidad de calor producida cuando una cierta cantidad de oxígeno o de cloro se combina con su equivalente de otras substancias. Estas mediciones nos permiten calcular el exceso de la energía que las substancias en cuestión tenían en su estado original cuando no estaban combinadas, con respecto a la que tienen ellas después de la combinación.

95. Trabajo científico por hacer

Aunque ya se ha hecho una gran cantidad de excelente trabajo de esta clase, la extensión del campo hasta ahora investigado aparece completamente insignificante cuando consideramos la ilimitada variedad y complejidad de los cuerpos naturales con los que tenemos que tratar.

De hecho, el trabajo especial que está ante el investigador físico en el estado actual de la ciencia, es la determinación de la cantidad de energía que entra o sale de un sistema material durante el paso del sistema de su estado normal a cualquier otro estado definido.

96. Historia de la doctrina de la energía

La importancia científica de dar un nombre a la cantidad que llamamos energía cinética parece haber

sido reconocida primero por Leibniz, quien dio al producto de la masa por el cuadrado de la velocidad el nombre de *Vis Viva*. Esto es el doble de la energía cinética.

Newton, en el "Escolio a las Leyes del Movimiento", expresa la relación entre la velocidad con la cual es realizado el trabajo por el agente externo y con la cual es producido, almacenado, o transformado por cualquier máquina u otro sistema material; la siguiente exposición que él hace es con el objeto de mostrar la amplia extensión de la aplicación de la Tercera Ley del Movimiento.

"Si la acción del agente externo es estimada por el producto de su fuerza por su velocidad y la reacción de la resistencia en la misma forma por el producto de la velocidad de cada parte del sistema por la fuerza resistente generada por la fricción, cohesión, peso y aceleración, la acción y reacción serán iguales entre sí, cualquiera que sea la naturaleza y movimiento del sistema." El hecho de que esta exposición de Newton contiene implícitamente casi toda la doctrina de la energía fue señalado por primera vez por Thomson y Tait.

Las palabras Acción y Reacción, tal como ocurren en la enunciación de la Tercera Ley del Movimiento, son explicadas para significar Fuerzas, esto es, son los aspectos opuestos de uno y el mismo Esfuerzo.

En el pasaje citado anteriormente se da un sentido nuevo y diferente a estas palabras, considerando

Acción y Reacción como el producto de una fuerza por la velocidad de su punto de aplicación. De acuerdo con esta definición, la Acción del agente externo es la velocidad con que hace trabajo. Esto es lo que significa la Potencia de una máquina de vapor o de cualquier otro motor primario. Se expresa generalmente con el número estimado de caballos ideales que se requerirían para hacer el trabajo a la misma velocidad de la máquina y a esto se llama Caballos de Fuerza de la máquina.

Cuando deseamos expresar con una sola palabra la velocidad a que un agente hace trabajo, la llamamos Potencia del agente, definiendo la potencia como el trabajo efectuado en la unidad de tiempo.

El uso del término Energía, en un sentido preciso y científico, para expresar la cantidad de trabajo que puede hacer un sistema material, fue introducido por el Dr. Young.

97. Sobre las diferentes formas de energía

La energía que un cuerpo tiene en virtud de su movimiento se llama energía cinética.

Un sistema también puede tener energía en virtud de su configuración, si las fuerzas del sistema son tales que el sistema hiciera trabajo contra resistencia externa mientras pasa a otra configuración. Esta energía se llama Energía Potencial. Así, cuando una piedra ha sido elevada a cierta altura sobre

la superficie de la tierra, el sistema de dos cuerpos, la piedra y la tierra, tiene energía potencial y es capaz de hacer una cierta cantidad de trabajo durante el descenso de la piedra. Esta energía potencial es debida al hecho de que la piedra y la tierra se atraen entre sí, de modo que debe gastarse trabajo por el hombre que eleva la piedra y la aleja de la tierra y después que la piedra es elevada la atracción entre la tierra y la piedra es capaz de hacer trabajo al descender ésta. Dicha clase de energía, por consiguiente, depende del trabajo que las fuerzas del sistema harían si las partes de éste cedieran a la acción de estas fuerzas. Esto es llamado la "Suma de las Tensiones" por Helmholtz en su celebrada memoria sobre la "Conservación de Energía". Thomson lo llamó Energía Estática; también se le ha llamado Energía de Posición; pero Rankine introdujo el término Energía Potencial (una expresión muy acertada), ya que no solamente significa la energía que el sistema no tiene en posesión real, que sólo tiene el poder de adquirir o también indica su conexión con lo que se ha llamado (en otros campos) la Función Potencial.

Las diferentes formas en que se ha encontrado que la energía existe en los sistemas materiales han sido situadas en una u otra de estas dos clases: Energía Cinética, debida al movimiento y Energía Potencial, debida a la configuración.

Así se puede hacer que un cuerpo caliente, al

dar calor a un cuerpo más frío, haga trabajo causando que el cuerpo frío se expanda en oposición a la presión. Por consiguiente, un sistema material en que hay una distribución no uniforme de temperatura tiene la capacidad de hacer trabajo, o energía. Esta energía se cree ahora que es energía cinética, debido a un movimiento de agitación de las partes más pequeñas del cuerpo caliente.

La pólvora tiene energía, pues cuando se enciende es capaz de poner en movimiento una bala de cañón. La energía de la pólvora es Energía Química, resultante del poder que poseen los constituyentes de aquélla, de ordenarse a sí mismos en una nueva manera cuando explotan tal que ocupan un volumen mucho mayor que el correspondiente a la pólvora. En el estado actual de la ciencia los químicos se representan la acción química como un reordenamiento de partículas bajo la acción de fuerzas que tienden a producir este cambio de ordenamiento. Desde este punto de vista, por consiguiente, la energía química es energía potencial.

El aire comprimido en la cámara de una pistola de aire es capaz de impulsar a una bala. En un tiempo se suponía que la energía del aire comprimido se debía a la repulsión mutua de sus partículas. Si esta explicación fuera la verdadera, su energía sería la energía potencial. En tiempos más recientes se ha pensado que las partículas del aire están en un estado de movimiento y que su presión

es causada por el impacto de estas partículas sobre las paredes del recipiente. De acuerdo con esta teoría, la energía del aire comprimido es energía cinética.

Hay así muchos modos diferentes en que un sistema material puede poseer energía y puede ser dudoso en algunos casos si la energía es de la forma cinética o de la forma potencial. La naturaleza de la energía, no cambia independientemente de la forma en que se encuentre. La cantidad de energía siempre puede ser expresada como equivalente a la de un cuerpo de masa definida que se mueve con una velocidad determinada.

Capítulo VI

RECAPITULACION

98. Mirada retrospectiva sobre dinámica abstracta

Hemos pasado por esa parte de la ciencia fundamental del movimiento de la materia que hemos tratado de una manera suficientemente elemental para ser congruente con el plan de este libro.

Nos resta realizar un repaso general de las relaciones entre las partes de esta ciencia y del todo con otras ciencias físicas, lo cual podemos hacer ahora en una forma más satisfactoria que antes de haber entrado al tema.

99. Cinemática

Empezamos con la cinemática, o sea la ciencia del movimiento puro. En esta división del tema las ideas que se nos presentan son las de espacio y tiempo. El único atributo de la materia que aparece ante nosotros es su continuidad de existencia en espacio y tiempo; esto es, el hecho de que cada partícula de materia, en cualquier instante, está en

un lugar y sólo en uno y que su cambio de lugar durante cualquier intervalo de tiempo se cumple moviéndose a lo largo de una trayectoria continua.

Ni a la fuerza que afecta al movimiento del cuerpo, ni a la masa de éste, de la cual depende la cantidad de fuerza requerida para producir el movimiento, les prestamos nuestra atención en la ciencia pura del movimiento.

100. Fuerza

En la siguiente división del tema la fuerza es considerada con respecto a aquello que altera el movimiento de una masa.

Si limitamos nuestra atención a un solo cuerpo, nuestra investigación nos permite, mediante la observación de su movimiento, determinar la dirección y magnitud de la fuerza resultante que actúa sobre él y esta investigación es el modelo y tipo de todas las investigaciones emprendidas cuyo propósito es el descubrimiento y medición de fuerzas físicas.

Pero esto puede ser considerado como una simple aplicación de la definición de una fuerza y no como una nueva verdad física.

Cuando llegamos a definir fuerzas iguales como aquellas que producen iguales razones de aceleración en la misma masa, e iguales masas como aquellas que son igualmente aceleradas por fuerzas iguales, es cuando encontramos que estas definiciones de igualdad son la afirmación de la verdad física, que la comparación de cantidades de materia por las fuerzas requeridas para producir en ésas una aceleración dada es un método que siempre conduce a resultados congruentes, cualesquiera que sean los valores absolutos de las fuerzas y de las aceleraciones.

101. Esfuerzo

El siguiente paso en la ciencia de la fuerza es aquel que consiste en pasar de la consideración de una fuerza que actúa sobre un cuerpo, a la de su aspecto relativo a la acción mutua entre dos cuerpos, que es llamada por Newton Acción y Reacción y que ahora se expresa más brevemente con la sola palabra Esfuerzo.

102. Relatividad del conocimiento dinámico

Todo nuestro progreso hasta este punto puede ser descrito como un desarrollo gradual de la doctrina de la relatividad de todos los fenómenos físicos. Debemos reconocer evidentemente la posición como relativa, pues no podemos describir la posición de un cuerpo en nigunos términos entre los que no exista relación. El lenguaje ordinario acerca del

movimiento y reposo no excluye completamente la noción de ser medidos absolutamente, pues la razón de esto es que, en nuestro lenguaje ordinario, asumimos tácitamente que la tierra está en reposo.

Al irse aclarando nuestras ideas de espacio y movimiento, llegamos a ver cómo el cuerpo entero de la doctrina dinámica concuerda en un sistema congruente.

Nuestra noción primitiva puede haber sido que el conocer absolutamente dónde estamos y en qué dirección vamos, son elementos esenciales de nuestro conocimiento como seres conscientes.

Pero esta noción, aunque defendida indudablemente por muchos sabios en tiempos antiguos, ha ido desapareciendo gradualmente de las mentes de los estudiantes de física.

No hay marcas ni guías en el espacio; una porción de espacio es exactamente como cualquiera otra porción, de modo que no podemos decir dónde estamos. Estamos, como todo estaba, en un sereno mar, sin estrellas, brújulas, sondas, viento o marea y no podemos decir en qué dirección vamos. No tenemos bitácora que pueda darnos datos para emprender una ruta de navegación; podemos computar nuestra velocidad de movimiento con respecto a los cuerpos circundantes, pero no sabemos cómo pueden estarse moviendo esos cuerpos en el espacio.

103. Relatividad de fuerza

No podemos decir siquiera qué fuerza puede estar actuando sobre nosotros; sólo podemos decir la diferencia entre la fuerza que actúa sobre una cosa y la que actúa sobre otra.

Tenemos un ejemplo real de esto en nuestra experiencia diaria. La tierra se mueve alrededor del sol en un año a una distancia de 91,520,000 millas, o 1.473×10^{13} centímetros. De esto se sigue que es ejercida una fuerza sobre la tierra en la dirección del sol, que produce una aceleración de la tierra en la dirección del sol de aproximadamente 0.019 en pies y en segundos, o alrededor de $\frac{1}{1680}$ de la intensidad de la gravedad en la superficie de la tierra.

Una fuerza igual a la dieciseis centésima parte del peso de un cuerpo podría medirse fácilmente por métodos experimentales conocidos, especialmente si la dirección de esa fuerza, estuviera inclinada distintamente con respecto a la vertical en diferentes horas del día.

Ahora bien, si la atracción del sol se ejerciera sobre la parte sólida de la tierra, a diferencia de los cuerpos móviles sobre los cuales experimentamos, un cuerpo suspendido de una cuerda y moviéndose con la tierra, indicará la diferencia entre la acción solar sobre el cuerpo y la acción sobre la tierra como un todo.

Si, por ejemplo, el sol atrajera a la tierra y no al cuerpo suspendido, entonces al amanecer el punto de suspensión, que está conectado rígidamente con la tierra, sería atraído hacia el sol, mientras que el cuerpo suspendido sería influenciado únicamente por la atracción de la tierra y la cuerda aparecería deflexionada alejándose del sol una dieciseis centésima parte de la longitud de la cuerda. Al ponerse el sol la cuerda sería deflexionada alejándose del sol poniente una cantidad igual; y como el sol se pone en un punto de la brújula diferente del punto en que sale, las deflexiones de la cuerda serían en direcciones diferentes y la diferencia en la posición de la plomada al salir y al ponerse el sol sería observada fácilmente.

Pero en lugar de esto, la atracción de la gravitación es ejercida sobre toda clase de materia por igual a la misma distancia del cuerpo que atrae. Al salir y al ponerse el sol el centro de la tierra y el cuerpo suspendido están casi a la misma distancia del sol y no se puede observar en estos tiempos ninguna deflexión de la plomada debida a la atracción del sol. La atracción del sol, por consiguiente, en cuanto es ejercida igualmente sobre todos los cuerpos en la tierra, no produce ningún efecto sobre sus movimientos relativos. Solamente las diferencias de intensidad y dirección de la atracción que actúa sobre distintas partes de la tierra son las que pueden producir algún efecto y estas diferencias son

tan pequeñas para cuerpos a distancias moderadas, que sólo cuando el cuerpo sobre el que actúan es muy grande, como en el caso del océano, es cuando su efecto se hace perceptible en la forma de mareas.

104. Rotación

En lo que hemos dicho hasta aquí acerca del movimiento de los cuerpos, hemos asumido tácitamente que al comparar una configuración del sistema con otra, podemos trazar en la configuración final una línea paralela a una línea de la configuración original. En otras palabras, asumimos que hay ciertas direcciones en el espacio que pueden ser consideradas como constantes y a las que pueden referirse otras direcciones durante el movimiento del sistema.

En astronomía, una línea trazada desde la tierra hasta una estrella puede ser considerada como de dirección fija, porque el movimiento relativo de la tierra y la estrella es en general tan pequeño comparado con la distancia entre ellas, que el cambio de dirección, aún en un siglo, es muy pequeño. Pero es manifiesto que todas esas direcciones de referencia deben ser indicadas por la configuración de un sistema material existente en el espacio y que si este sistema fuera removido completamente, las direcciones de referencia originales nunca podrían ser recuperadas.

Pero aunque es imposible determinar la velocidad

absoluta de un cuerpo en el espacio, es posible determinar si la dirección de una línea en un sistema material es constante o variable.

Por ejemplo, es posible por observaciones hechas sobre la tierra sola, sin referencia a los cuerpos celestes, determinar si la tierra está girando o no.

En lo que concierne a la configuración geométrica de la tierra y los cuerpos celestes, es evidente que ocurre una cosa semejante.

"Si el sol, predominante en el cielo,
Se levanta sobre la tierra, o la tierra se levanta [sobre el sol;
Él desde el este empezando su llameante camino,
O ella del oeste avanzando su silente carrera
Con paso inofensivo que girando se duerme
En su eje suave, al pasearse apacible,
Y te lleva suavemente con el aire tranquilo." *

Las distancias entre los cuerpos que componen el universo, ya sean celestes o terrestres y los ángulos entre las líneas que los unen, son todo lo que puede precisarse sin apelar a principios dinámicos y éstos no serán afectados si cualquier movimiento de rotación de todo el sistema, semejante al de un cuerpo rígido alrededor de un eje, se combina con el movimiento real. Así que, desde un punto de vista geométrico, el sistema de Copérnico, de acuerdo con el cual la tierra gira, no tiene ventaja, excepto la de la simplicidad, sobre el sistema en que se supone que la tierra está en reposo y los movimientos aparentes de los cuerpos celestes son sus movimientos absolutos.

* J. Milton, *Paradise Lost* (Book VIII, Lines 160-6).

Aun si avanzamos un paso más y consideramos la teoría dinámica de la tierra girando alrededor de su eje, podemos explicar su figura achatada y el equilibrio del océano y de todos los demás cuerpos sobre su superficie con cualquiera de dos hipótesis: la del movimiento de la tierra alrededor de su eje, o la de la tierra sin girar, sino asumiendo su figura achatada a causa de una fuerza que actúa hacia afuera en todas direcciones desde su eje, aumentando la intensidad de esta fuerza según aumenta la distancia desde el eje. Tal fuerza, si actuara sobre toda clase de materia de igual forma explicaría no solamente el achatamiento de la figura de la tierra, sino también las condiciones de equilibrio de todos los cuerpos en reposo con respecto a la tierra.

Solamente cuando seguimos más adelante aún y consideramos los fenómenos de cuerpos que están en movimiento con respecto a la tierra, es cuando estamos realmente constreñidos a admitir que la tierra gira.

105. Determinación por Newton de la velocidad absoluta de rotación

Newton fue el primero en señalar que el movimiento absoluto de rotación de la tierra podría ser

demostrado con experimentos sobre la rotación de un sistema material. Por ejemplo, si una cubeta de agua está suspendida de una viga con una cuerda y se tuerce la cuerda para mantener a la cubeta girando alrededor de un eje vertical, el agua pronto girará a la misma velocidad que la cubeta, de modo que el sistema del agua y la cubeta gira alrededor de su eje como un cuerpo sólido.

El agua de la cubeta se eleva en los lados y se deprime en el centro, mostrando que para moverla en un círculo debe ejercerse una presión hacia el eje. Esta concavidad de la superficie depende del movimiento absoluto de rotación del agua y no de su rotación relativa.

Por ejemplo, no depende de la rotación relativa a la cubeta. Pues al principio del experimento, cuando pusimos a girar la cubeta y antes que el agua tomara el movimiento, el agua y la cubeta están en movimiento relativo, pero la superficie del agua es plana, porque el agua no está girando, sino únicamente la cubeta.

Cuando el agua y la cubeta giran juntos, no hay movimiento de una con relación a la otra, pero la superficie del agua es cóncava, porque está girando.

Cuando se detiene la cubeta, mientras el agua continúa girando su superficie permanece cóncava, mostrando que aún está girando aunque la cubeta no lo esté.

Manifiestamente es lo mismo, de acuerdo con este experimento, que la rotación sea en la dirección de las manecillas del reloj o en la dirección opuesta, siempre que la velocidad de rotación sea la misma.

Supongamos ahora que este experimento se realiza en el Polo Norte. Sea que la cubeta gira, mediante un arreglo adecuado de relojería, ya sea en la dirección de las manecillas del reloj o en dirección opuesta, a una velocidad perfectamente regular.

Si se hace que la cubeta gire por un mecanismo de relojería una vez en vetinticuatro horas (tiempo sideral) en la forma de las manecillas del reloj con la carátula hacia arriba, la cubeta girará con respecto a la tierra, pero no con respecto a las estrellas.

Si se para el mecanismo de relojería, la cubeta girará con respecto a las estrellas, pero no con respecto a la tierra.

Finalmente, si se hace que la cubeta gire una vez en veinticuatro horas (tiempo sideral) en la dirección opuesta, estará girando con respecto a la tierra a la misma velocidad que al principio, pero en vez de estar libre de rotación respecto a las estrellas, estará girando a la velocidad de una vuelta cada doce horas.

Por tanto, si la tierra está en reposo y las estrellas moviéndose a su alrededor, la forma de la superficie será la misma en el primero y en el último casos; pero si la tierra está girando, el agua estará

girando en el último caso pero no en el primero y esto se manifestará al elevarse el agua más alto en los lados en el último caso que en el primero.

La superficie del agua no será realmente cóncava en ninguno de los casos supuestos, pues el efecto de la gravedad actuando hacia el centro de la tierra es hacer la superficie convexa, como es la superficie del mar y la velocidad de rotación en nuestro experimento no es suficientemente rápida para hacer cóncava a la superficie. Solamente hará ligeramente menos convexa a ésta que la superficie del mar en el último caso y ligeramente más convexa en el primero.

Pero la diferencia en la forma de la superficie del agua sería tan excesivamente pequeña, que con nuestros métodos de medición sería inútil intentar determinar la rotación de la tierra de esa manera.

106. Péndulo de Foucault

El método más satisfactorio de hacer un experimento para este fin es el ideado por Foucault.

Una bola pesada es colgada de un punto fijo con un alambre, de modo que sea capaz de oscilar como un péndulo en cualquier plano vertical que pase por el punto fijo.

Al empezar a mover el péndulo debe tenerse cuidado de que el alambre, cuando esté en el punto más bajo de la oscilación, pase exactamente por la

posición que asume al colgar verticalmente. Si pasa a un lado de esta posición, regresará por el otro lado y este movimiento del péndulo alrededor de la vertical en lugar de a través de la vertical debe evitarse cuidadosamente, porque deseamos librarnos de todos los movimientos de rotación ya sea en uno u otro sentido.

Consideremos el momentum angular del péndulo alrededor de la línea vertical que pasa por el punto fijo.

En el instante en que el alambre del péndulo pasa por la línea vertical, el momentum angular alrededor de la línea vertical es cero.

La fuerza de gravedad siempre actúa paralelamente a esta línea vertical, por lo que no puede producir momentum angular alrededor de ella. La tensión del alambre siempre actúa a través del punto fijo, por lo que no puede producir momentum angular alrededor de la línea vertical.

Por tanto, el péndulo nunca puede adquirir momentum angular alrededor de la línea vertical que pasa por el punto de suspensión.

Por consiguiente, cuando el alambre está fuera de la vertical, el plano vertical que pasa por el centro de la bola y el punto de suspensión no puede estar girando; porque si estuviera, el péndulo tendría un momentum angular alrededor de la línea vertical.

Ahora supongamos que este experimento se ejecuta en el Polo Norte. El plano de oscilación del

péndulo permanecerá absolutamente constante en dirección, de modo que si la tierra gira, la rotación de la tierra se manifestará.

Sólo tenemos que trazar una línea sobre la tierra paralelamente al plano de oscilación y comparar la posición de esta línea con la del plano de oscilación en un tiempo subsecuente.

Como un péndulo de esta clase suspendido apropiadamente oscilará durante varias horas, es fácil averiguar si la posición del plano de oscilación es constante con respecto a la tierra, como lo estaría si la tierra está en reposo, o constante con respecto a las estrellas, si las estrellas no se mueven alrededor de la tierra.

Hemos supuesto, en interés de la simplicidad en la descripción, que el experimento se hace en el Polo Norte. No es necesario ir allá para demostrar la rotación de la tierra. La única región donde el experimento no lo manifestará es en el ecuador.

En cualquier otro lugar el péndulo indicará la velocidad de rotación de la tierra con respecto a la línea vertical en ese lugar. Si en cualquier instante el plano del péndulo pasa por una estrella cerca del horizonte ya sea al salir o al ponerse, continuará pasando por esa estrella mientras esté cerca del horizonte. Es decir, la parte horizontal del movimiento aparente de una estrella sobre el horizonte es igual a la velocidad de rotación del plano de oscilación del péndulo.

Se ha observado que el plano de oscilación aparece girando en la dirección opuesta en el hemisferio sur y por una comparación de las velocidades en varios lugares el tiempo real de rotación de la tierra se ha deducido sin referencia a observaciones astronómicas. El valor medio, según fue deducido de estos experimentos por los Sres. Galbraith y Haugton en su *Manual de Astronomía*, es 23 horas 53 minutos 37 segundos. El verdadero tiempo de rotación de la tierra es 23 horas 56 minutos 4 segundos, tiempo solar medio.

107. Materia y energía

Todo lo que sabemos acerca de la materia se relaciona con la serie de fenómenos en que es transferida energía de una porción de materia a otra, hasta que en alguna parte de la serie nuestros cuerpos son afectados y nos hacemos conscientes de una sensación.

Por el proceso mental que está fundado en tales sensaciones llegamos a aprender las condiciones de estas sensaciones y a seguirlas hasta objetos que no son parte de nosotros mismos, pero en todo caso el hecho que aprendemos es la acción mutua entre cuerpos. Esta acción mutua es la que nos hemos esforzado por describir en este tratado. Bajo varios aspectos es llamada Fuerza, Acción y Reacción y Esfuerzo y la evidencia de ella es el cambio del movimiento de los cuerpos entre los cuales actúa.

El proceso por el cual el esfuerzo produce cambio de movimiento se llama Trabajo y, como ya hemos mostrado, el trabajo puede ser considerado como la transferencia de Energía de un cuerpo o sistema a otro.

Por consiguiente, como hemos dicho, estamos familiarizados con la materia sólo como aquello que puede tener energía que se le ha transmitido desde otra materia y que puede a su vez, comunicar energía a otra materia.

La energía, por otra parte, la conocemos únicamente como aquello que en todos los fenómenos naturales está pasando continuamente de una porción de materia a otra.

108. Prueba de una sustancia material

La energía no puede existir sino en conexión con la materia. Por tanto, como en el espacio entre el sol y la tierra, las radiaciones luminosas y térmicas que han dejado al sol y que no han llegado a la tierra, poseen energía, cuya cantidad por milla cúbica puede ser medida, esta energía debe pertenecer a materia existente en los espacios interplanetarios y como solamente es por la luz que nos llega como nos enteramos de la existencia de las más remotas estrellas, concluimos que la materia que transmite luz está diseminada por la totalidad del universo visible.

109. La energía no es apta para la identificación

No podemos identificar una porción particular de energía, o seguirla a través de sus transformaciones. No tiene existencia individual, tal como la que atribuimos a porciones particulares de materia.

Las transacciones del universo material parecen ser conducidas como si lo fueran, en un sistema de crédito. Cada transacción consiste de una transferencia de tanto crédito o energía de un cuerpo a otro. Este acto de transferencia o pago se llama trabajo. La energía así transferida no retiene ningún carácter por el que pueda ser identificada cuando pasa de una forma a otra.

110. El valor absoluto de la energía de un cuerpo es desconocido

La energía de un sistema material sólo puede ser estimada en una manera relativa.

En primer lugar, aunque la energía del movimiento de las partes con relación al centro de masa del sistema puede ser definida con precisión, la energía total consiste de esto junto con la energía de una masa igual a la de todo el sistema moviéndose con la velocidad del centro de masa. Ahora bien, esta última velocidad (la del centro de masa) sólo puede ser estimada por referencia a algún cuerpo externo

al sistema y el valor que asignamos a esta velocidad será diferente de acuerdo con el cuerpo que seleccionemos como nuestro origen.

Por consiguiente, la energía cinética estimada de un sistema material contiene una parte, cuyo valor no puede ser determinado sino por la selección arbitraria de un origen. El único origen que no sería arbitrario es el centro de masa del universo material, pero este es un punto cuyos, posición y movimiento, son totalmente desconocidos para nosotros.

111. Energía latente

Pero la energía de un sistema material es indeterminada por otra razón. No podemos reducir el sistema a un estado en que no tenga energía y toda energía que nunca es removida del sistema debe permanecer desapercibida por nosotros, pues solamente cuando entra o sale del sistema podemos tenerla en cuenta en alguna forma.

Debemos, por consiguiente, considerar la energía de un sistema material como una cantidad de la que podemos averiguar el aumento o disminución al pasar el sistema de una condición definida a otra. El valor absoluto de la energía en la condición normal nos es desconocido, y no sería de ningún valor para nosotros si lo conociéramos, ya que todos los fenómenos dependen de las variaciones de la energía y no de su valor absoluto.

112. Una discusión completa de la energía incluiría a la totalidad de la ciencia física

La discusión de las diversas formas de energía (gravitacional, electromagnética, molecular, térmica, etc.) con las condiciones de la transferencia de energía de una forma a otra y la constante disipación de la energía disponible para producir trabajo, constituye la totalidad de la ciencia física, en cuanto ha sido desarrollada en la forma dinámica bajo las diversas designaciones de Astronomía, Electricidad, Magnetismo, Optica, Teoría de los Estados Físicos de los Cuerpos, Termodinámica y Química.

CAPITULO VII

EL PENDULO Y LA GRAVEDAD

113. SOBRE EL MOVIMIENTO UNIFORME EN UN CÍRCULO

Sea M (Fig. 11) un cuerpo que se mueve en un círculo con velocidad V.

Sea OM = r radio del círculo.

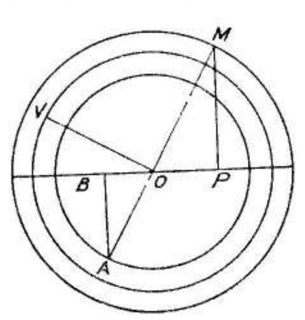


Figura 11

La dirección de la velocidad de M es la de la tangente al círculo. Trácese OV paralela a esta dirección por el centro del círculo e igual a la distancia recorrida en la unidad de tiempo con la velocidad V, entonces OV = V.

Si tomamos O como el origen del diagrama de

velocidad, V representará la velocidad del cuerpo en M.

Al moverse el cuerpo alrededor del círculo, el punto V también describirá un círculo, y la velocidad del punto V será a la de M como OV es a OM.

Si, por consiguiente, trazamos OA en la prolongación de MO y por tanto paralela a la dirección de movimiento de V y hacemos OA una tercera proporcional a OM y OV y si tomamos O como el origen del diagrama de razón de aceleración, entonces el punto A representará la velocidad del punto V, o, lo que es lo mismo, la razón de aceleración del punto M.

Por tanto, cuando un cuerpo se mueve con velocidad uniforme en un círculo, su aceleración es dirigida hacia el centro del mismo y es una tercera proporcional al radio del círculo y a la velocidad del cuerpo.

La fuerza que actúa sobre el cuerpo M es igual al producto de esta aceleración por la masa del cuerpo, o si F es esta fuerza,

$$F = \frac{MV^2}{r}.$$

114. Fuerza centrífuga

Esta fuerza F es la que debe actuar sobre el cuerpo M para mantenerlo en el círculo de radio r, en el que se está moviendo con velocidad V.

La dirección de esta fuerza es hacia el centro del círculo.

Si esta fuerza es aplicada por medio de una cuerda atada al cuerpo, la cuerda estará en un estado de tensión. Para una persona que sostenga el otro extremo de la cuerda esta tensión aparecerá dirigida hacia el cuerpo M, como si el cuerpo M tuviera una tendencia a moverse alejándose del centro del círculo que él está describiendo.

De aquí que esta última fuerza sea llamada frecuentemente Fuerza Centrífuga.

La fuerza que realmente actúa sobre el cuerpo, estando dirigida hacia el centro del círculo, se llama Fuerza Centrípeta y en algunos tratados populares las fuerzas centrípeta y centrífuga son descritas como oponiéndose y equilibrándose entre sí. Pero ellas son simplemente diferentes aspectos de un mismo esfuerzo (que actúa en la cuerda).

115. Tiempo periódico

El tiempo en describir la circunferencia del círculo se llama Tiempo Periódico. Si π representa la razón de la circunferencia de un círculo a su diámetro, que es 3.14159 . . ., la circunferencia de un círculo de radio r es $2\pi r$; y como la misma es recorrida en el tiempo periódico T con velocidad V, tenemos

$$2\pi r = VT.$$

Por tanto $F = 4\pi^2 M\frac{r}{T^2}$.

La velocidad de movimiento circular se expresa a menudo por el número de revoluciones en la unidad de tiempo. Sea este número que es la frecuencia, denotado por *n* entonces

$$nT = 1$$

y $$F = 4\pi^2 Mrn^2.$$

116. Sobre las oscilaciones armónicas simples

Si mientras el cuerpo M (Fig. 11) se mueve en un círculo con velocidad uniforme, otro punto P se mueve en un diámetro fijo del círculo, de modo que esté siempre en el pie de la perpendicular desde M sobre ese diámetro, se dice que el cuerpo P ejecuta Oscilaciones Armónicas Simples.

El radio, r, del círculo se llama Amplitud de la oscilación.

El tiempo periódico de M se llama Tiempo Periódico de Oscilación.

El ángulo que OM forma con la dirección positiva del diámetro fijo se llama Fase de la Oscilación.

117. Sobre la fuerza que actúa sobre el cuerpo oscilante

La única diferencia entre los movimientos de M y P es que M tiene un movimiento vertical combinado

con un movimiento horizontal que es el mismo que el de P. Por consiguiente, la velocidad y la aceleración de los dos cuerpos difieren únicamente con respecto a la parte vertical de la velocidad y aceleración de M.

La aceleración de P es en consecuencia la componente horizontal de la de M y como la aceleración de M está representada por OA, que está en la dirección de la prolongación de MO, la aceleración de P estará representada por OB, donde B es el pie de la perpendicular desde A sobre el diámetro horizontal. Ahora, por triángulos semejantes OMP, OAB.

$$OM \cdot OA = OP \cdot OB.$$

Pero $$OM = r \text{ y } OA = -4\pi^2 \frac{r}{T^2}$$

Por tanto $$OB = -\frac{4\pi^2}{T^2} OP = -4\pi^2 n^2 OP.$$

En la oscilación armónica simple, por consiguiente, la aceleración siempre es dirigida hacia el centro de oscilación y es igual a la distancia desde este centro multiplicada por $4\pi^2 n^2$ y si la masa del cuerpo oscilante es P, la fuerza que actúa sobre él a una distancia χ desde O es $4n^2\pi^2 P\chi$.

Resulta, por consiguiente, que un cuerpo que ejecuta oscilaciones armónicas simples en una línea rec-

ta es influido por una fuerza que varía con la distancia del centro de oscilación y el valor de esta fuerza a una distancia dada depende únicamente de esa distancia, de la masa del cuerpo y del cuadrado del número de oscilaciones en la unidad de tiempo y es independiente de la amplitud de éstas.

118. Oscilaciones isócronas

De lo anterior se sigue que si un cuerpo se mueve en una línea recta y es influido por una fuerza dirigida hacia un punto fijo sobre la línea y que varía con la distancia desde ese punto, ejecutará oscilaciones armónicas simples, cuyo tiempo periódico será el mismo cualquiera que sea la amplitud de oscilación.

Si para una clase particular de desplazamiento de un cuerpo, como el girar alrededor de un eje, la fuerza que tiende a regresarlo a una posición dada varía con el desplazamiento, el cuerpo ejecutará oscilaciones armónicas simples alrededor de esa posición, cuyo tiempo periódico será independiente de su amplitud.

Las oscilaciones de esta clase, que son realizadas en el mismo tiempo, cualquiera que sea su amplitud, se llaman Oscilaciones Isocrónas.

119. Energía potencial del cuerpo oscilante

La velocidad del cuerpo cuando pasa por el punto

de equilibrio es igual a la del cuerpo que se mueve en el círculo, o

$$V = 2\pi rn,$$

donde r es la amplitud de oscilación y n es el número de dobles oscilaciones por segundo.

Por tanto, la energía cinética del cuerpo oscilante en el punto de equilibrio es

$$\frac{1}{2} MV^2 = 2\pi^2 Mr^2 n^2$$

donde M es la masa del cuerpo.

En la elongación extrema donde $\chi = r$, la velocidad y en consecuencia la energía cinética, del cuerpo es cero. La disminución de energía cinética debe corresponder a un igual aumento de energía potencial. Por consiguiente, si reconocemos la energía potencial a partir de la configuración en que el cuerpo está en su punto de equilibrio su energía potencial cuando está a una distancia r desde este punto es $2\pi^2 Mn^2 r^2$.

Esta es la energía potencial de un cuerpo que oscila isócronamente y realiza n oscilaciones dobles en un segundo cuando está en reposo a la distancia r, a partir del punto de equilibrio. Como la energía potencial no depende del movimiento del cuerpo sino únicamente de su posición, podemos escribir $2\pi^2 Mn^2 \chi^2$, donde χ es la distancia desde el punto de equilibrio.

120. El péndulo simple

El péndulo simple consiste de un pequeño cuerpo pesado llamado plomada, suspendido de un punto fijo por una cuerda fina de longitud constante. La plomada se supone tan pequeña que su movimiento puede tratarse como el de una partícula material y la cuerda se supone tan fina que podemos despreciar su masa y peso. La plomada es puesta en movimiento de modo que oscile un pequeño ángulo en un plano vertical. Su trayectoria, por consiguiente, es un arco de círculo, cuyo centro es el punto de suspensión, O y cuyo radio es la longitud de la cuerda, que denotaremos por l.

Sean O (Fig. 12) el punto de suspensión y OA la posición del péndulo al colgar verticalmente. Cuando la plomada está en M está más alto que cuando está en A por una altura $AP = \dfrac{AM^2}{AB}$ donde AM es la cuerda del arco AM y $AB = 2l$.

Si M es la masa de la plomada y g la intensidad de la gravedad, el peso de la plomada será Mg y el trabajo hecho contra la gravedad durante el movimiento de la plomada desde A hasta M será Mg AP. Esta, en consecuencia, es la energía potencial del péndulo cuando la plomada está en M, reconociendo la energía cero cuando la plomada está en A.

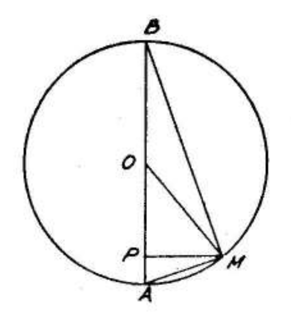


Figura 12

Podemos escribir esta energía

$$\frac{Mg}{2l} AM^2.$$

La energía potencial de la plomada cuando se desplaza en un arco varía con el cuadrado de la cuerda de ese arco.

Si hubiera variado con el cuadrado del arco mismo en que la plomada se mueve, las oscilaciones habrían sido estrictamente isócronas. Como la energía potencial varía más lentamente que el cuadrado del arco, el período de cada oscilación será mayor cuando la amplitud es mayor.

Para oscilaciones muy pequeñas, no obstante, podemos despreciar la diferencia entre la cuerda y el arco y denotando el arco por χ podemos escribir la energía potencial

$$\frac{Mg}{2l} x^2.$$

Pero ya hemos mostrado que en las oscilaciones armónicas la energía potencial es $2\pi^2 Mn^2 x^2$.

Igualando estas dos expresiones y simplificando encontramos

$$g = 4\pi^2 n^2 l,$$

donde g es la intensidad de la gravedad, π es la razón de la circunferencia de un círculo a su diámetro, n es el número de oscilaciones del péndulo en la unidad de tiempo y l es la longitud del péndulo.

121. Un péndulo rígido

Si pudiéramos construir un péndulo con una plomada tan pequeña y una cuerda tan fina que pudiera ser considerado para los fines prácticos como un péndulo simple, sería fácil determinar g por este método. Pero todos los péndulos reales tienen plomadas de considerable tamaño y a fin de preservar la longitud constante la plomada debe estar conectada con el punto de suspensión por una fuerte varilla, cuya masa no puede despreciarse. Siempre es posible, no obstante, determinar la longitud de un péndulo simple cuyas oscilaciones serían ejecutadas de la misma manera que las de un péndulo de cualquier forma.

La discusión completa de este tema nos conduciría a cálculos más allá de los límites de este tratado. Podemos, sin embargo, llegar al resultado más importante, sin cálculo, del modo siguiente.

El movimiento de un cuerpo rígido en un plano puede ser definido completamente estableciendo el movimiento de su centro de masa y el movimiento del cuerpo alrededor de aquél.

La fuerza requerida para producir un cambio dado en el movimiento del centro de masa depende únicamente de la masa del cuerpo. (Art. 63).

El momento requerido para producir un cambio dado de velocidad angular alrededor del centro de masa depende de la distribución de la masa, siendo mayor mientras más alejadas estén las diferentes partes del cuerpo del centro de masa.

Por consiguiente, si formamos un sistema de dos partículas rígidamente conectadas, siendo la suma de las masas igual a la masa de un péndulo, coincidiendo su centro de masa con el del péndulo y sus distancias del centro de masa siendo tales que se requiere un par del mismo momento, para producir un movimiento rotatorio dado alrededor del centro de masa del nuevo sistema como alrededor del péndulo, entonces el nuevo sistema, para movimientos en cierto plano, será dinámicamente equivalente al péndulo dado, esto es, si los dos sistemas son movidos en la misma forma las fuerzas requeridas para guiar el movimiento serán iguales. Como las dos partículas pueden tener cualquier proporción, siempre que la suma de sus masas sea igual a la masa

del péndulo y como la línea que las une puede tener cualquier dirección si pasa por el centro de masa, podemos arreglarlas de modo que una de las partículas corresponda a cualquier punto dado del péndulo, digamos el punto de suspensión P (Fig. 13). La masa de esta partícula y la posición y masa de la otra en Q serán determinadas. La posición de la segunda partícula, Q, se llama Centro de Oscilación. Ahora bien, si en el sistema de dos partículas una de ellas, P, es fija y la otra, Q, puede

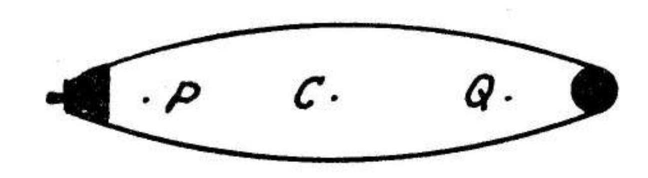


Figura 13

oscilar bajo la acción de la gravedad, tenemos un péndulo simple. Pues una de las partículas, P, actúa como punto de suspensión y la otra, Q, está a una distancia constante de él, por lo que la conexión entre ellas es la misma que si estuvieran unidas por una cuerda de longitud l = PQ.

Por consiguiente, un péndulo de cualquier forma oscila exactamente del mismo modo que un péndulo simple cuya longitud es la distancia desde el centro de suspensión hasta el centro de oscilación.

122. Inversión del péndulo

Supongamos ahora al sistema de dos partículas invertido, siendo Q el punto de suspensión y P oscilando. Tenemos ahora un péndulo simple de la misma longitud que antes. Sus oscilaciones, por consiguiente, se ejecutarán en el mismo tiempo. Pero ello es equivalente dinámicamente al péndulo suspendido por su centro de oscilación.

Por consiguiente, si un péndulo es invertido y suspendido por su centro de oscilación, sus oscilaciones tendrán el mismo período que antes y la distancia entre el centro de suspensión y el de oscilación será igual a la de un péndulo simple que tenga el mismo tiempo de oscilación.

Fue así como el Capitán Kater determinó la longitud del péndulo simple que oscila segundos.

El construyó un péndulo que podía hacerse oscilar cerca de dos filos de navaja, en lados opuestos del centro de masa y a distancia *desiguales* de él.

Mediante ciertos ajustes, hizo igual el tiempo de oscilación siendo el centro de suspensión ya fuera un filo o el otro. La longitud del péndulo simple correspondiente fue encontrada entonces midiendo la distancia entre los filos de navaja.

123. Ilustración del péndulo de Kater

El principio del Péndulo de Kater puede ilus-

trarse con un experimento muy sencillo e impresionante. Tómese una tabla delgada de cualquier forma (Fig. 14) e insértese un trozo de alambre cerca de una orilla, permitiendo que cuelgue en un plano vertical, sosteniendo los extremos del alambre entre el pulgar y el índice. Atese una pequeña bala a un hilo pasando éste sobre el alambre, de modo que la bala cuelgue junto a la tabla. Muévase la mano con la que se sostiene el alambre horizontalmente en el plano de la tabla, observando si ésta se mueve hacia adelante o hacia atrás con respecto a la bala. Si se mueve hacia adelante alárguese el hilo, si hacia atrás acórtese éste hasta que la bala y la tabla se muevan juntas. Ahora márquese el punto de la tabla opuesta al centro de la bala y átese el hilo al alambre. Se encontrará que si se sostiene el alambre por sus extremos y se mueve de cualquier manera, por brusca e irregular que sea, en el plano de la tabla, la bala nunca se apartará del punto marcado sobre la tabla.

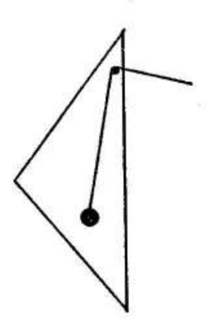


Figura 14

En consecuencia, este punto se llama centro de oscilación, porque cuando la tabla está oscilando alrededor del alambre cuando es fijado oscila como si consistiera de una sola partícula colocada en el punto.

También se llama centro de percusión, porque si la tabla está en reposo y el alambre se mueve de repente horizontalmente, la tabla empezará a girar alrededor del punto como un centro.

124. Determinación de la intensidad de la gravedad

El método más directo para determinar g es, indudablemente, dejar que un cuerpo caiga y encontrar qué velocidad ha ganado en un segundo, aunque es muy difícil hacer observaciones precisas del movimiento de cuerpos cuando sus velocidades son tan grandes como 981 centímetros en un segundo y además, el experimento tendría que hacerse en un recipiente del que se hubiera extraido el aire, ya que la resistencia del aire a un movimiento tan rápido es muy considerable, comparada con el peso del cuerpo que cae.

El experimento con el péndulo es mucho más satisfactorio. Haciendo al arco de oscilación muy pequeño, el movimiento de la plomada es tan lento que la resistencia del aire sólo puede tener muy poca influencia sobre el tiempo de oscilación. En

los mejores experimentos el péndulo se hace oscilar en un recipiente hermético del que se ha extraido el aire.

Además de esto, el movimiento se repite y el péndulo oscila a uno y otro lado cientos, o hasta miles de veces antes que las diversas resistencias a que está expuesto reduzcan la amplitud de las oscilaciones hasta que ya no puedan ser observadas.

Así, la observación real no consiste en vigilar el principio y fin de una oscilación, sino en determinar la duración de una serie de muchos centenares de oscilaciones y de allí deducir el tiempo de una sola oscilación. El observador se libra del trabajo de contar el número total de oscilaciones y la medición es una de las más precisas en toda la esfera de la ciencia práctica mediante el siguiente método.

125. Método de observación

Un reloj de péndulo se coloca atrás del péndulo experimental, de modo que cuando ambos péndulos estén colgando verticalmente la plomada, o cualquiera otra parte del péndulo experimental oculte precisamente un punto blanco en el reloj de péndulo, como se ve por un telescopio fijo situado a cierta distancia frente al reloj.

De tiempo en tiempo se hacen observaciones del tránsito de "estrellas reloj" a través del meridiano

y de ellas se deduce la velocidad del reloj en términos de "tiempo solar medio".

Entonces se pone a oscilar el péndulo experimental y los dos péndulos se observan por el telescopio. Supongamos que el tiempo de una sola oscilación no es exactamente el del reloj de péndulo, sino un poco mayor.

El observador en el telescopio ve el péndulo de reloj siempre ganando al péndulo experimental, hasta que al fin el experimental oculta precisamente el punto blanco en el péndulo de reloj al cruzar la línea vertical. El tiempo en que esto ocurre se observa y registra como la Primera Coincidencia Positiva.

El péndulo de reloj continúa ganando al otro y después de cierto tiempo los dos péndulos cruzan la línea vertical en el mismo instante en direcciones opuestas. El tiempo en que esto ocurre se registra como la Primera Coincidencia Negativa. Después de un intervalo de tiempo igual habrá una segunda coincidencia positiva y así sucesivamente.

Por este método el reloj mismo cuenta el número, N, de oscilaciones de su propio péndulo entre las coincidencias. Durante este tiempo el péndulo experimental ha ejecutado una oscilación menos que el reloj. Por consiguiente, el tiempo de oscilación del péndulo experimental es $\frac{N}{N-1}$ segundos de tiempo reloj.

Cuando no hay coincidencia exacta, sino que el péndulo de reloj está adelante del péndulo experimental en un paso por la vertical y atrás en el siguiente paso, una pequeña práctica por parte del observador le permitirá estimar en qué tiempo entre los pases los dos péndulos deben haber estado en la misma fase. La época de coincidencia puede estimarse así hasta en una fracción de segundo.

126. Estimación del error

El péndulo experimental continuará oscilando durante algunas horas, por lo que el tiempo total a medirse puede ser diez mil o más oscilaciones.

Pero el error introducido en el tiempo de oscilación calculado, por un error hasta de un segundo completo al anotar el tiempo de oscilación puede hacerse sumamente pequeño prolongando el experimento.

Pues si observamos la primera y la n ésima coincidencias y encontramos que están separadas por un intervalo de N segundos del reloj, el péndulo experimental habrá perdido n oscilaciones, en comparación con el reloj y habrá hecho $N-n$ oscilaciones en N segundos. Por tanto el tiempo de una sola oscilación es $T = \dfrac{N}{N-n}$ segundos de tiempo del reloj.

Supongamos, no obstante, que por un error de un segundo anotamos la última coincidencia como teniendo lugar N + 1 segundos después del primero. El valor de T deducido de este resultado sería

$$T' = \frac{N+1}{N+1-n}$$

y el error introducido por la equivocación de un segundo será

$$T' - T = \frac{N+1}{N+1-n} - \frac{N}{N-n}$$

$$= \frac{n}{(N+1-n)\ (N-n)}$$

Si N es 10,000 y n es 100, una equivocación de un segundo al anotar el tiempo de coincidencia alterará el valor de T sólo una millonésima parte aproximadamente de su valor.

CAPITULO VIII

GRAVITACION UNIVERSAL

127. Método de Newton

El más instructivo ejemplo del método de razonamiento dinámico es aquel por el cual Newton determinó la ley de la fuerza con la que los cuerpos celestes actúan entre sí.

El proceso de razonamiento dinámico consiste en deducir de las sucesivas configuraciones de los cuerpos celestes, según son observados por los astrónomos, sus velocidades y sus aceleraciones y de este modo determinar la dirección y la magnitud relativa de la fuerza que actúa sobre ellos.

Kepler ya había preparado el camino para la investigación de Newton, deduciendo de un cuidadoso estudio de las observaciones de Tycho Brahe, las tres leyes del movimiento planetario que llevan el nombre de aquél.

128. Leyes de Kepler

Las Leyes de Kepler son puramente cinemáticas. Describen completamente los movimientos de los pla-

netas, pero no dicen nada acerca de las fuerzas por las que estos movimientos están determinados.

Su interpretación dinámica fue descubierta por Newton.

La primera y segunda leyes se refieren al movimiento de un solo planeta.

Ley I. Las áreas barridas por el vector trazado desde el sol hasta un planeta son proporcionales a los tiempos en que son recorridas. Si h denota el doble del área barrida en la unidad de tiempo, el doble del área barrida en el tiempo t será ht y si P es la masa del planeta, Pht será el área-masa, como se definió en el Artículo 68. Por tanto el momentum angular del planeta alrededor del sol, que es la rapidez de cambio del área-masa, será Ph, una cantidad constante.

Por consiguiente, según el Artículo 70, la fuerza, si la hay, que actúa sobre el planeta no debe tener momento con respecto al sol, porque si lo tuviera aumentaría o disminuiría el momentum angular a una rapidez medida por el valor de este momento.

En consecuencia, cualquiera que sea la fuerza que actúa sobre el planeta, la dirección de esta fuerza debe pasar siempre por el sol.

129. Velocidad angular

Definición. La velocidad angular de un vector es la rapidez con la que aumenta el ángulo, que forma con un vector fijo en el plano de su movimiento.

Si ω es la velocidad angular de un vector, y r su longitud, la rapidez a que barre un área es $\frac{1}{2}\omega r^2$. Por tanto,

$$h = \omega r^2$$

y como h es constante, la velocidad angular ω, del movimiento de un planeta alrededor del sol, varía inversamente con el cuadrado de la distancia desde el sol.

Esto es verdadero cualquiera que sea la ley de fuerza, con tal de que la fuerza que actúa sobre el planeta pase siempre por el sol.

130. Movimiento alrededor del centro de masa

Puesto que el esfuerzo entre el planeta y el sol actúa sobre ambos cuerpos, ninguno de ellos puede permanecer en reposo. El único punto cuyo movimiento no es afectado por el esfuerzo es el centro de masa de los dos cuerpos.



Figura 15

Si r es la distancia SP (Fig. 15) y C es el centro de masa, $SC = \frac{Pr}{S + P}$ y $CP = \frac{SR}{S + P}$. El momentum angular de P alrededor de C es

$$P\omega \frac{S^2 r^2}{(S + P)^2} = \frac{PS^2 h}{(S + P)^2}$$

131. La orbita

Ya hemos echo uso de diagramas de configuración y de velocidad al estudiar el movimiento de un sistema material. Estos diagramas, sin embargo, representan solamente el estado del sistema en un instante dado y este estado es indicado por la posición relativa de los puntos correspondientes a los cuerpos que forman el sistema.

Sin embargo, a menudo es conveniente representar en un solo diagrama la serie completa de configuraciones o velocidades que el sistema asume. Si suponemos que los puntos del diagrama se mueven de modo que representen continuamente el estado del sistema móvil, cada punto del diagrama trazará una línea, recta o curva.

En el diagrama de configuración esta línea se llama, en general, la Trayectoria del cuerpo. En el caso de los cuerpos celestes a menudo es llamada la Orbita.

132. El hodógrafo

Sobre el diagrama de velocidad la línea trazada por cada punto móvil se llama el Hodógrafo del cuerpo al que corresponde.

El estudio del Hodógrafo, como un método de investigar el movimiento de un cuerpo fue introducido por Sir W. R. Hamilton. El hodógrafo puede ser definido como la trayectoria trazada por la extremidad de un vector que representa continuamente, en dirección y magnitud, la velocidad de un cuerpo en movimiento.

Al aplicar el método del hodógrafo a un planeta, cuya órbita está en un plano, encontraremos conveniente suponer al hodógrafo girado alrededor de su origen un ángulo recto, por lo que el vector del hodógrafo es perpendicular en vez de paralelo a la velocidad que representa.

133. Segunda ley de Kepler

Ley II. La órbita de un planeta con respecto al sol es una elipse, estando el sol en uno de los focos.

Sea APBQ (Fig. 16) la órbita elíptica. Sea S el sol en un foco y H el otro foco. Prolónguese SP hasta U, de modo que SU sea igual al eje transversal AB y únase a HU; entonces HU será proporcional y perpendicular a la velocidad en P.

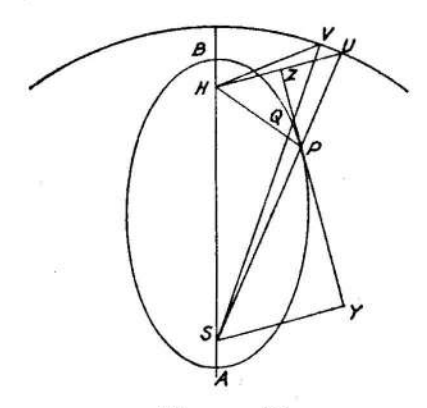


Figura 16

Después biséctese HU en Z y únase ZP; ZP será una tangente a la elipse en P; sea SY una perpendicular desde S sobre esta tangente.

Si v es la velocidad en P y h el doble del área barrida en la unidad de tiempo, $h = v\mathrm{SY}$.

Asimismo, si b es la mitad del eje conjugado de la elipse,

$$\mathrm{SY} \cdot \mathrm{HZ} = b^2$$

Ahora bien, $$\mathrm{HU} = 2\ \mathrm{HZ};$$

por tanto $$V = \frac{1}{2}\frac{h}{b^2}\mathrm{HU}.$$

Por consiguiente HU es siempre proporcional a la velocidad y es perpendicular a su dirección. Ahora SU es siempre igual a AB. Por consiguiente el círculo cuyos centro es S y radio AB es el hodógrafo del planeta, siendo H el origen del hodógrafo.

Los puntos correspondientes de la órbita y del hodógrafo son aquellos que están situados en la misma línea recta a través de S.

Así P corresponde a U y Q a V.

La velocidad comunicada al cuerpo durante su paso de P a Q es representada por la diferencia geométrica entre los vectores HU y HV, esto es, por la línea UV y es perpendicular a este arco del círculo y está por tanto, como ya hemos probado, dirigida hacia S.

Si PQ es el arco descrito en un tiempo muy pequeño, entonces UV representa la aceleración y como UV está en un círculo cuyo centro es S, UV será una medida del movimiento angular del planeta alrededor de S. Por consiguiente la aceleración es proporcional a la velocidad angular y ésta según el Art. 129 es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia SP. Por consiguiente la aceleración del planeta es en la dirección del sol y es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde el sol. Esta, por lo tanto, es la ley de acuerdo con la cual la atracción del sol sobre un planeta varía según el planeta se mueve en su órbita y altera su distancia del sol.

134. Fuerza sobre un planeta

Como ya hemos mostrado, la órbita del planeta con respecto al centro de masa del sol y el planeta, tiene sus dimensiones en la razón de S a S + P a

aquellas de la órbita del planeta con respecto al sol.

Si $2a$ y $2b$ son los ejes de la órbita del planeta con respecto al sol, el área es $\pi\, ab$, y si T es el tiempo para recorrer una órbita completa, el valor de h es $2\pi \frac{ab}{T}$. La velocidad con respecto al sol es en consecuencia $\pi \frac{a}{Tb}$ HU.

Con respecto al centro de masa es,

$$\frac{S}{S+P} \frac{\pi a}{Tb} \text{HU}$$

La aceleración total del planeta hacia el centro de masa al describir un arco PQ es

$$\frac{S}{S+P} \frac{\pi a}{Tb} \text{UV}$$

y el impulso sobre el planeta cuya masa es P es por consiguiente

$$\frac{SP}{S+P} \frac{\pi a}{Tb} \text{UV}$$

Sea t el tiempo para describir PQ, entonces el doble del área SPQ es

$$ht = \omega r^2 t$$

y $$\text{UV} = 2a\omega t = 2a \frac{h}{r^2} t = 4\pi \frac{a^2 b}{Tr^2} t.$$

Por tanto la fuerza sobre el planeta es

$$F = 4\pi^2 \frac{S\,P}{S+P} \frac{a^3}{T^2 r^2}$$

Este es entonces el valor del esfuerzo o atracción entre un planeta y el sol en términos de sus masas P y S, su distancia media a, su distancia real r y el tiempo periódico T.

135. Interpretación de la tercera ley de Kepler

Para comparar la atracción entre el sol y diferentes planetas, Newton utilizó la tercera ley de Kepler.

Ley III. Los cuadrados de los tiempos periódicos de diferentes planetas son proporcionales a los cubos de sus distancias medias. En otras palabras $\frac{a^3}{T^2}$ es constante, digamos $\frac{c}{4\pi^2}$.

Por tanto $$F = c \frac{S\,P}{S+P} \frac{1}{r^2}$$

En el caso de los planetas menores sus masas son tan pequeñas, comparadas con la del sol, que $\frac{S}{S+P}$ puede tomarse igual a 1, de modo que $F = c \frac{P}{r^2}$, o sea que la atracción sobre un planeta es directa-

mente proporcional a su masa e inversamente proporcional al cuadardo de su distancia.

136. Ley de la gravitación

Este es el hecho más notable acerca de la atracción de la gravitación, que a la misma distancia actúa igualmente sobre masas iguales de sustancias de todas clases .Esto fue probado mediante experimentos con péndulos para diferentes clases de materia en la superficie de la tierra. Newton extendió la ley a la materia de que están constituidos los diferentes planetas.

Había sido sugerido, antes que Newton lo probara, que el sol como un todo atrae a un planeta como un todo y la ley del cuadrado inverso también se había enunciado previamente, pero en manos de Newton la doctrina de la gravitación asumió su forma final.

Cada porción de materia atrae a otra porción de materia y el esfuerzo entre ellas es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas.

Pues si la atracción entre un gramo de materia en el sol y un gramo de materia en un planeta a una distancia r es $\frac{C}{r^2}$ donde C es una constante, entonces si hay S gramos en el sol y P en el planeta, la atracción total entre el sol y un gramo en el

planeta será $\frac{CS}{r^2}$ y la atracción total entre el sol y el planeta será $C\frac{SP.}{r^2}$.

Comparando este enunciado de la "Ley de la Gravitación Universal" de Newton con el valor de F obtenido previamente, encontramos:

$$C\frac{SP}{r^2} = 4\pi^2 \frac{SP}{S+P} \frac{a^3}{T^2r^2}$$

O

$$4\pi^2a^3 = C\,(S+P)\,T^2$$

137. Forma corregida de la tercera ley de Kepler

Por consiguiente la Tercera Ley de Kepler debe ser corregida así:

Los cubos de las distancias medias son como los cuadrados de los tiempos multiplicados por la suma de las masas del sol y del planeta.

En el caso de los planetas mayores, Júpiter, Saturno, etc., el valor de S + P es considerablemente mayor que en el caso de la tierra y los planetas menores. En consecuencia los tiempos periódicos de los planetas mayores deben ser algo menores de lo que serían de acuerdo con la ley de Kepler, como se ha encontrado que este es el caso.

En la siguiente tabla las distancias medias (a) de los planetas se dan en términos de la distancia media de la tierra y los tiempos periódicos (T) en términos del año sideral:

Planeta	a	T	a^3	T^2	$a^3—T^2$
Mercurio	0.387098	0.24084	0.0580046	0.0580049	—0.0000003
Venus	0.72333	0.61518	0.378451	0.378453	—0.000002
Tierra	1.0000	1.00000	1.00000	1.00000	
Marte	1.52369	1.88082	3.53746	3.53747	—0.00001
Júpiter	5.20278	11.8618	140.832	140.701	+0.131
Saturno	9.53879	29.4560	867.914	867.658	+0.256
Urano	19.1824	84.0123	7058.44	7058.07	+0.37
Neptuno	30.037	164.616	27100.0	27098.4	+1.6

Aparece según esta tabla que la tercera ley de Kepler es aproximadamente exacta pues a^3 es aproximadamente igual a T^2, pero para los planetas cuya masa es menor que la de la tierra (a saber, Mercurio, Venus y Marte) a^3 es menor que T^2, en tanto que para Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno, cuya masa es mayor que la de la Tierra, a^3 es mayor que T^2.

138. Energía potencial debida a la gravitación

La energía potencial de la gravitación entre los cuerpos S y P puede ser calculada cuando conocemos la atracción entre ellos en términos de su distancia. El proceso de cálculo por el cual sumamos los efectos de una cantidad continuamente variante

pertenece al Cálculo Integral y aunque en este caso el cálculo puede ser explicado por métodos elementales, más bien deduciremos la energía potencial directamente de la primera y segunda leyes de Kepler.

Estas leyes definen completamente el movimiento del sol y el planeta y por tanto podemos encontrar la energía cinética del sistema correspondiente a cualquier parte de la órbita elíptica. Ahora bien, puesto que el sol y el planeta forman un sistema conservativo, la suma de las energías cinética y potencial es constante y en consecuencia cuando conocemos la energía cinética podemos deducir la parte de energía potencial que depende de la distancia entre los cuerpos.

139. Energía cinética del sistema

Para determinar la energía cinética observamos que la velocidad del planeta con respecto al sol es, según el Artículo 133,

$$v = \frac{1}{2}\frac{h}{b^2}\text{HU}$$

Las velocidades del planeta y el sol con respecto al centro de masa del sistema son, respectivamente

$$\frac{\text{S}}{\text{S}+\text{P}}v \text{ y } \frac{\text{P}}{\text{S}+\text{P}}v$$

Las energías cinéticas del planeta y el sol son por consiguiente

$$\frac{1}{2} P \frac{S^2}{(S+P)^2} v^2 \text{ y } \frac{1}{2} S \frac{P^2}{(S+P)^2} v^2$$

y la energía cinética total es

$$\frac{1}{2} \frac{SP}{S+P} v^2 = \frac{1}{8} \frac{SP}{S+P} \frac{h^2}{b^4} HU^2$$

Para determinar más directamente v^2 en términos de SP o r, observemos que por la ley de las áreas

$$vSY = h = \frac{2\pi ab}{T} \qquad \ldots (1),$$

también por una propiedad de la elipse

$$HZ \cdot SY = b^2 \qquad \ldots (2),$$

v por triángulos semejantes HZP y SYP

$$\frac{SY}{HZ} = \frac{HP}{SP} = \frac{r}{2a-r} \qquad \ldots (3);$$

multiplicando (2) y (3) encontramos

$$SY^2 = \frac{b^2 r}{2a-r}$$

Por tanto, según (1)

$$v^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2} \frac{1}{Sy^2} = \frac{4\pi^2 a^2}{T^2} \left(\frac{2a}{r} - 1 \right)$$

y la energía cinética del sistema es

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \frac{SP}{S+P} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right)$$

y esto, según la ecuación al final del Artículo 136, se convierte en

$$C \cdot SP \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right)$$

donde C es la constante de gravitación.

Este es el valor de la energía cinética de los dos cuerpos S y P al moverse relativamente en una elipse cuyo eje transversal es $2a$.

140. Energía potencial del sistema

La suma de las energías cinética y potencial es constante, pero su valor absoluto es desconocido y no necesario de conocer, según el Artículo 110.

Por tanto si concluimos de acuerdo con la constancia de la energía total, que la energía potencial es de la forma

$$K - C \cdot SP \frac{1}{r}$$

el segundo término, que es el único que depende de la distancia, r, es también el único con el que

tenemos algo que hacer. El otro término K representa el trabajo hecho por la gravitación mientras, los dos cuerpos originalmente a una distancia infinita entre sí, se aproximan tan cerca como lo permiten sus dimensiones.

141. La luna es un cuerpo pesado

Habiendo determinado así la ley de la fuerza entre cada planeta y el sol, Newton procedió a mostrar que el peso observado de los cuerpos en la superficie de la tierra y la fuerza que retiene a la luna en su órbita alrededor de la tierra están relacionados entre sí de acuerdo con la misma ley inversa del cuadrado de la distancia.

Esta fuerza de gravedad actúa en toda región accesible a nosotros, en la cima de las montañas más altas y en el punto más alto alcanzado por los globos. Su intensidad, medida por experimentos con péndulos, decrece según ascendemos y aunque la altura a que podemos ascender es tan pequeña comparada con el radio de la tierra que por observaciones de esta clase no podemos inferir que la gravedad varía inversamente con el cuadrado de la distancia desde el centro de la tierra, el decrecimiento observado de la intensidad de la gravedad es congruente con esta ley, cuya forma fue sugerida a Newton por el movimiento de los planetas.

Asumiendo, entonces, que la intensidad de la gravedad varía inversamente con el cuadrado de la distancia desde el centro de la tierra y conociendo su

valor en la superficie de la misma, Newton calculó su valor a la distancia media de la luna.

Sus primeros cálculos fueron viciados porque adoptó una estimación errónea de las dimensiones de la tierra. Sin embargo, cuando hubo obtenido un valor más correcto de esta cantidad encontró que la intensidad de la gravedad calculada para una distancia igual a la de la luna era igual a la fuerza requerida para mantener a la luna en su órbita.

Así él identificó a la fuerza que actúa entre la tierra y la luna con la que origina que los cuerpos cerca de la superficie terrestre caigan hacia la tierra.

142. Experimento de Cavendish

Habiendo mostrado así que la fuerza con que los cuerpos celestes se atraen entre sí es de la misma clase que aquella con que los cuerpos que podemos manejar son atraídos hacia la tierra, quedaba por mostrar que los cuerpos tales como los que podemos manejar se atraen entre sí.

La dificultad de hacer esto surge del hecho de que la masa de los cuerpos que podemos manejar es tan pequeña comparada con la de la tierra, que aunque acerquemos los dos cuerpos tanto como podamos la atracción entre ellos es una fracción sumamente pequeña del peso de ambos.

No podemos deshacernos de la atracción de la tierra, pero debemos diseñar el experimento en tal

forma que la gravedad interfiera lo menos posible sobre los efectos de la atracción del otro cuerpo.

El aparato ideado por el Rev. John Mitchell para este propósito es el que ha recibido desde entonces el nombre de Balanza de Torsión. Mitchell murió antes que pudiera hacer el experimento, pero su aparato llegó después a manos de Henry Cavendish, quien lo mejoró en muchos aspectos y midió la atracción entre bolas de plomo fijas y pequeñas bolas suspendidas de los brazos de la balanza. Un instrumeto semejante fue independientemente inventado después por Coulomb para medir pequeñas fuerzas eléctricas y magnéticas y continúa siendo el mejor instrumento conocido en la ciencia para la medición de pequeñas fuerzas de todas clases.

143. La balanza de torsión

La Balanza de Torsión consiste de una varilla horizontal suspendida por un alambre desde un soporte fijo. Cuando la varilla es girada por una fuerza externa en un plano horizontal tuerce el alambre y siendo éste elástico tiende a resistir esta fatiga y a destorcerse por sí mismo. Esta fuerza de torsión es proporcional al ángulo en que el alambre es torcido, por lo que si causamos una fuerza que actúe en una dirección horizontal en el extremo de la varilla en ángulo recto con ésta, podemos, observando el ángulo en el que la fuerza es capaz de girar la varilla, determinar la magnitud de la fuerza.

La fuerza es directamente proporcional al ángulo de torsión y a la cuarta potencia del diámetro del alambre, e inversamente proporcional a la longitud de la varilla y a la longitud del alambre.

Por consiguiente usando un alambre largo y fino y una varilla larga, podemos medir fuerzas muy pequeñas.

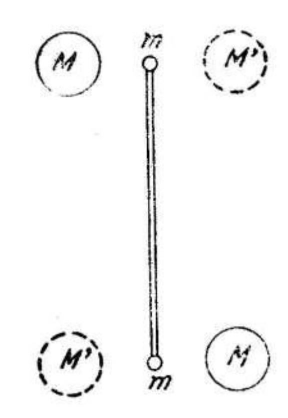


Figura 17

En el experimento de Cavendish dos esferas de igual masa, *m* están suspendidas de las extremidades de la varilla de la balanza de torsión. Por ahora despreciaremos la masa de la varilla en comparación con la de las esferas. Dos esferas más grandes de igual masa, M, están arregladas de modo que pueden ser colocadas ya sea en M y M o en M′ y M′. En la primera posición ellas tienden, por su atracción sobre las esferas más pequeñas, *m* y *m*, a hacer girar la varilla de la balanza en dirección hacia ellas. En la segunda posición ellas tienden a hacerla girar así

en el sentido opuesto. La balanza de torsión y sus esferas suspendidas están encerradas en una caja, para evitar ser perturbadas por corrientes de aire. La posición de la varilla de la balanza se averigua observando una escala graduada vista por reflexión en un espejo vertical sujeto en la mitad de la varilla. La balanza se coloca en un cuarto sola y el observador no entra al cuarto, sino que observa la imagen de la escala graduada con un telescopio.

144. Método del experimento

El tiempo, T, de una doble oscilación de la balanza de torsión se averigua primero y también la posición de equilibrio de los centros de las esferas suspendidas.

Las esferas grandes son llevadas entonces a las posiciones M, M, de modo que el centro de cada una de ellas esté a una distancia desde la posición de equilibrio del centro de la esfera suspendida.

No se intenta esperar hasta que las oscilaciones de la varilla se hayan amortiguado, sino que se observan las divisiones de la escala correspondiente a los extremos de una sola oscilación y se encuentra que están distantes χ e y respectivamente desde la posición de equilibrio. En estos puntos:



Figura 18

la varilla, durante un instante, está en reposo, por lo que su energía es enteramente potencial y como la energía total es constante, la energía potencial correspondiente a la posición χ debe ser igual a la correspondiente a la posición y.

Ahora bien, si T es el tiempo de una doble oscilación alrededor del punto de equilibrio o, la energía potencial debida a la torsión cuando la lectura de la escala es χ, de acuerdo con el Artículo 119, es

$$\frac{2\pi^2 m}{T^2}\chi^2$$

y la debida a la gravitación entre m y M es, por el Artículo 140,

$$K - C\frac{m\,M}{a-\chi}.$$

La energía potencial de todo el sistema en la posición χ es por consiguiente

$$K - C\frac{m\,M}{a-\chi} + \frac{2\pi^2 m}{T^2}\chi^2$$

En la posición y es

$$K - C\frac{m\,M}{a-y} + \frac{2\pi^2 m}{T^2}y^2$$

y como la energía potencial en estas dos posiciones es igual,

$$Cm\,M\left(\frac{1}{a-y}-\frac{1}{a-\chi}\right)=\frac{2\pi^2 m}{T^2}\left(y^2-\chi^2\right)$$

Por tanto

$$C=\frac{2\pi^2}{MT^2}\left(\chi+y\right)\left(a-\chi\right)\left(a-y\right)$$

Con esta ecuación, la constante de gravitación C, se determina en función de las cantidades observadas: M la masa de las esferas grandes en gramos, T el tiempo de una doble oscilación en segundos y las distancias x, y y a en centímetros.

De acuerdo con los experimentos de Baily, $C = 6.5 \times 10^{-8}$. Si asumimos la unidad de masa de modo que a una unidad de distancia produzca una unidad de aceleración, siendo el centímetro y el segundo las unidades, la unidad de masa sería aproximadamente 1.537×10^7 gramos, o 15.37 toneladas. Esta unidad de masa reduce, la constante de gravitación C, a la unidad. Es por ello usada en los cálculos de astronomía física.

145. Gravitación universal

Hemos indicado así la atracción de gravitación a travès de una gran variedad de fenómenos naturales y encontrado que la ley establecida para la variación de la fuerza a diferentes distancias entre un planeta y el sol también es válida cuando compa-

ramos la atracción entre diferentes planetas y el sol y también cuando comparamos la atracción entre la luna y la tierra con aquella entre la tierra y los cuerpos pesados en su superficie. Hemos encontrado también que la gravitación de masas iguales a distancias iguales es la misma cualquiera que sea la naturaleza del material del que las masas están constituidas. Esto lo indagamos mediante experimentos con péndulos de diferentes substancias y también por una comparación de la atracción del sol sobre diferentes planetas, que probablemente no son semejantes en composición. Los experimentos de Baily sobre esferas de diferentes substancias colocadas en la balanza de torsión confirman esta ley.

Por consiguiente, puesto que encontramos en tan gran número de casos que ocurren en regiones tan remotas entre sí que la fuerza de gravitación depende de la masa de los cuerpos solamente y no de su naturaleza química o estado físico, podemos concluir que esto es verdadero para todas las substancias.

Por ejemplo, ningún hombre de ciencia duda que dos porciones de aire atmosférico se atraen entre sí, aunque tenemos muy poca esperanza de que los métodos experimentales sean inventados algún día tan refinados como para medir o siquiera hacer manifiesta esta atracción. Pero sabemos que hay atracción entre cualquier porción de aire y la tierra y encontramos por el experimento de Cavendish que los cuerpos gravitatorios, si son de masa suficiente, gra-

vitan sensiblemente uno hacia el otro y concluimos que dos porciones de aire gravitan entre sí. Pero aún es en extremo dudoso si el medio de la luz y la electricidad es una substancia gravitatoria aunque ciertamente es material y tiene masa.

146. Causa de la gravitación

Newton, en sus *Principia*, deduce de los movimientos observados de los cuerpos celestes el hecho de que se atraen entre sí de acuerdo con una ley determinada.

Esto lo da como un resultado de estricto razonamiento dinámico y así muestra cómo no sólo los fenómenos más conspicuos, sino todas las aparentes irregularidades de los movimientos de estos cuerpos son resultados calculables de este solo principio. En sus *Principia* se limita a la demostración y desarrollo de este gran paso en la ciencia de la acción mutua de los cuerpos. No dice nada acerca de los medios por los cuales los cuerpos son hechos gravitar entre sí. Sabemos que su mente no descansaba respecto a este punto, que él sentía que la gravedad en sí misma debía ser suficiente para ser explicada y que hasta sugirió una explicación que dependía de la acción de un medio etéreo penetrando el espacio. Pero con esa moderación que es característica de todas sus investigaciones, distinguió tales especulaciones de lo que había establecido por ob-

servación y demostración y excluyó de sus *Principia* toda mención a la causa de la gravitación, reservando sus pensamientos sobre este tema para las "Preguntas" impresas al final de su *Optica*.

Los intentos que se han hecho desde el tiempo de Newton para resolver esta difícil cuestión son pocos en número y no han conducido a ningún resultado bien establecido.

147. Aplicación del método de investigación de Newton

El método de investigación de las fuerzas que actúan entre cuerpos, fue señalado y ejemplificado por Newton para el caso de los cuerpos celestes y llevado hasta el fin, con buen éxito, por Cavendish, Coulomb y Poisson para el caso de cuerpos electrificados y magnetizados.

La investigación del modo en que las diminutas partículas de cuerpos actúan entre sí se hace más difícil por el hecho de que ambos cuerpos que consideramos y sus distancias son tan pequeñas que no podemos percibirlos o medirlos y por lo tanto somos incapaces de observar sus movimientos, como lo hacemos con los de los planetas o con los de los cuerpos electrificados o magnetizados.

148. Métodos de investigaciones moleculares

Por consiguiente, las investigaciones de la ciencia molecular han procedido en su mayor parte por el

método de la hipótesis y la comparación de los resultados de la hipótesis con los hechos observados.

El éxito de este método depende de la generalidad de la hipótesis con que empezemos. Si nuestra hipótesis es muy general, tal que los fenómenos a investigar dependen de la configuración y el movimiento de un sistema material, entonces, si podemos deducir resultados disponibles de tal hipótesis, podemos aplicarlos con seguridad a los fenómenos que abordamos.

Si, por otro lado, estructuramos la hipótesis de que la configuración, el movimiento o la acción del sistema material son de cierta clase definida y si los resultados de esta hipótesis concuerdan con los fenómenos, entonces, a menos que podamos probar que ninguna otra hipótesis explicaría los fenómenos, debemos admitir la posibilidad de que nuestra hipótesis sea errónea.

149. Importancia de las propiedades generales y elementales

Por consiguiente, es de máxima importancia en todas las investigaciones físicas que estemos completamente familiarizados con las propiedades más generales de los sistemas materiales; es por esta razón que en este libro he tratado estas propiedades generales más bien que entrar en el campo más variado e interesante de las propiedades especiales de formas particulares de materia.

CAPITULO IX

SOBRE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO DE UN SISTEMA CONECTADO *

150. El método de Lagrange proporciona ideas adecuadas para el estudio de las ciencias dinámicas superiores

En la sección cuarta de la segunda parte de su *Mécanique Analytique*, Lagrange ha dado un método para reducir las ecuaciones dinámicas ordinarias del movimiento de las partes de un sistema conectado, a un número igual al de los grados de libertad del sistema.

Las ecuaciones de movimiento de un sistema conectado han sido dadas en forma diferente por Hamilton y han conducido a una gran extensión de la parte superior de la dinámica pura.

En nuestros esfuerzos por traer los fenómenos eléctricos dentro del dominio de la dinámica, encon-

* Este capítulo, ahora agregado, es una reimpresión del Vol. II, Parte IV, Capitulo V, de la obra de Maxwell Treatise on Electricity and Magnetism (Tratado de Electricidad y Magnetismo, 1873). (N. de la R.)

traremos que es necesario tener nuestras ideas dinámicas en un estado adecuado para la aplicación directa a cuestiones físicas, por lo cual dedicaremos este capítulo a una exposición de estas ideas dinámicas desde un punto de vista físico.

151. Estas ideas deberán traducirse del lenguaje matemático al dinámico

El objetivo de Lagrange era someter a la dinámica al poder del cálculo. Empezó expresando las relaciones dinámicas elementales en términos de las correspondientes relaciones de cantidades algebraicas puras y de las ecuaciones así obtenidas dedujo sus ecuaciones finales mediante un proceso puramente algebraico. Ciertas cantidades (que expresan las reacciones entre las partes del sistema que han entrado en juego por sus conexiones físicas) aparecen en las ecuaciones de movimiento de las partes componentes del sistema y la investigación de Lagrange, desde un punto de vista matemático, es un método para eliminar estas cantidades de las ecuaciones finales.

Al seguir los pasos de esta eliminación la mente se ejercita en el cálculo, por lo cual debe mantenerse libre de la intromisión de ideas dinámicas. Nuestro objetivo, por otro lado, es cultivar nuestras ideas dinámicas. Por consiguiente, aprovechamos los trabajos de los matemáticos y retraducimos sus resultados del lenguaje del cálculo al lenguaje de la dinámica, de modo tal que nuestras palabras puedan reclamar la imagen mental no de algún proceso algebraico, sino de alguna propiedad de los cuerpos en movimiento.

El lenguaje de la dinámica ha sido ampliado considerablemente por quienes han expuesto en términos populares la doctrina de la Conservación de la Energía y se verá que gran parte de la siguiente exposición es sugerida por la investigación en la obra de Thomson y Tait *Natural Philosophy* especialmente el método de empezar con la teoría de las fuerzas impulsivas.

He aplicado este método a modo de evitar la consideración explícita del movimiento de cualquier parte del sistema excepto las coordenadas o variables, de las que depende el movimiento del todo. Indudablemente, importa que el estudiante pueda trazar la conexión de cada parte del sistema con el de las variables, aunque de ningún modo ello es necesario en el proceso de obtener las ecuaciones finales, que son independientes de la forma particular de estas conexiones.

152. Grados de libertad de un sistema conectado (las variables)

El número de grados de libertad de un sistema es el número de datos que deben darse a fin de determinar completamente su posición. Pueden darse formas diferentes a estos datos, pero su núme-

ro no puede ser alterado y depende de la naturaleza del sistema mismo.

Para fijar nuestras ideas podemos concebir al sistema conectado por medio de un mecanismo adecuado con cierto número de piezas móviles, cada una capaz de movimiento a lo largo de una línea recta, y no de otra clase de movimiento. El mecanismo imaginario que conecta a cada una de estas piezas con el sistema debe concebirse como libre de fricción, desprovisto de inercia, e incapaz de ser sometido a esfuerzo por la acción de fuerzas aplicadas. El uso de este mecanismo es únicamente para ayudar a la imaginación para atribuirles posición, velocidad y momentum a lo que aparece, en la investigación de Lagrange, como cantidades algebraicas puras.

Sea que q denote la posición de una de las piezas móviles, definida por su distancia desde un punto fijo en su línea de movimiento. Distinguiremos los valores de q correspondientes a las diferentes piezas con los subíndices $_1$, $_2$, etc. Cuando tratemos un conjunto de cantidades pertenecientes a una sola pieza podremos omitir el subíndice.

Cuando los valores de todas las variables (q) sean dados, la posición de cada una de las piezas móviles es conocida y, en virtud del mecanismo imaginario, la configuración del sistema entero está determinada.

153. Significado generalizado de velocidad (las velocidades)

Durante el movimiento del sistema la configuración cambia de alguna manera definida y como la configuración en cada instante es definida completamente por los valores de las variables (q), la velocidad de cada parte del sistema, así como su configuración, serán definidas por completo si conocemos los valores de las variables (q) y también sus velocidades $\left(\frac{dq}{dt}\right.$, ó, según la notación de Newton, $\left.\dot{q}\right)$.

154. Significado generalizado de fuerzas (las fuerzas)

Mediante una regulación apropiada del movimiento de las variables, cualquier movimiento del sistema, congruente con la naturaleza de las conexiones, puede ser producido. Para producir este movimiento moviendo las piezas variables, deben aplicarse fuerzas a estas piezas.

Denotaremos con Fr la fuerza que debe ser aplicada a cualquier variable *qr*. El sistema de fuerzas (F) es mecánicamente equivalente (en virtud de las conexiones del sistema) al sistema de fuerzas, cualquiera que pueda ser, el que produce realmente el movimiento.

155. SIGNIFICADO GENERALIZADO DE MOMENTUM E IMPULSO (LOS MOMENTA)

Cuando un cuerpo se mueve en tal forma que su configuración con respecto a la fuerza que actúa sobre él, permanece constante (como, por ejemplo, en el caso de una fuerza que actúa sobre una sola partícula en la línea de su movimiento), la fuerza motriz es medida por la razón de aumento del momentum. Si F es la fuerza motriz y p el momentum,

$$F = \frac{dp}{dt},$$

de donde $p = \int F dt$.

La integral-tiempo de una fuerza se llama el Impulso de la fuerza; por lo que podemos afirmar que el momentum es el impulso de la fuerza que llevaría al cuerpo de un estado de reposo al estado dado de movimiento.

En el caso de un sistema conectado en movimiento, la configuración está cambiando continuamente con una rapidez que depende de las velocidades ($\dot{q}$), por lo que ya no podemos asumir que el momentum es la integral-tiempo de la fuerza que actúa sobre aquél.

Pero el incremento δq de cualquier variable no puede ser mayor que $\dot{q}' \delta t$, donde δt es el tiempo durante el cual el incremento tiene lugar y $\dot{q}'$ es el mayor valor de la velocidad durante ese tiempo. En el caso de un sistema que se mueve a partir del reposo bajo la acción de fuerzas siempre en la misma dirección, esta es evidentemente la velocidad final.

Si la velocidad y la configuración finales del sistema son dadas, podemos concebir la velocidad siendo comunicada al sistema en un tiempo muy pequeño δt, difiriendo la configuración original de la configuración final en cantidades δq_1, δq_2, etc., que son menores que $\dot{q}_1 \ \delta t$, $\dot{q}_2$, δt, etc., respectivamente.

Mientras menor supongamos el incremento de tiempo δt, mayores deberán ser las fuerzas impresas, pero la integral-tiempo, o impulso, de cada fuerza, permanecerá finita. El valor límite del impulso, cuando el tiempo disminuye y finalmente se desvanece, es definido como el impulso *instantáneo* y el momentum p, correspondiente a cualquier variable q, es definido como el impulso correspondiente a esa variable, cuando el sistema es llevado instantáneamente de un estado de reposo al estado dado de movimiento.

Esta concepción, de que los momenta puedan ser producidos por impulsos instantáneos sobre el sistema en reposo, se introduce solamente como un método para definir la magnitud de los momenta; pues los momenta del sistema dependen únicamente del estado de movimiento instantáneo del sistema, y no del proceso por el cual ese estado se produjo.

En un sistema conectado el momentum correspondiente a cualquier variable es en general una fun-

ción lineal de las velocidades de todas las variables, en vez de ser, como en la dinámica de una partícula, simplemente proporcional a la velocidad.

Los impulsos requeridos para cambiar las velocidades del sistema repentinamente desde $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, etc., hasta $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2'$ etc., son evidentemente iguales a $p_1' - p_1$, $p_2' - p_2$ etc., los cambios de momentum de las diversas variables.

156. Trabajo efectuado por un pequeño impulso

El trabajo hecho por la fuerza F_1 durante el impulso es la integral-espacio de la fuerza, ó

$$W = \int F_1 dq_1$$
$$= \int F_1 \dot{q}_1 dt$$

Si $\dot{q}_1'$ es el mayor y $\dot{q}_1''$ el menor de los valores de la velocidad $\dot{q}_1$ durante la acción de la fuerza, W debe ser menor que

$$\dot{q}_1' \int F dt \text{ ó } \dot{q}_1' (p_1' \dot{q}_1 - p_1),$$

y mayor que

$$\dot{q}_1'' \int F dt \text{ ó } q_1'' \ (p_1' - p_1)$$

Si ahora suponemos que el impulso $\int F dt$ es disminuido sin límite, los valores de $\dot{q}_1'$ y $\dot{q}_1''$ se acercarán y finalmente coincidirán con el de $\dot{q}_1$, y podemos escribir $p_1' - p = \delta p_1$; por lo que el trabajo realizado es finalmente

$$\delta W_1 = \dot{q}_1 \, \delta \, p_1,$$

o sea, *el trabajo hecho por un impulso muy pequeño es finalmente el producto del impulso por la velocidad.*

157. Energía cinética en función de los momenta (Tp). (Incremento de la energía cinética)

Cuando se hace trabajo al establecer un sistema conservativo en movimiento, se le comunica energía y el sistema llega a ser capaz de efectuar una cantidad igual de trabajo contra resistencias antes de ser reducido al reposo.

La energía que un sistema posee en virtud de su movimiento se llama su Energía Cinética y es comunicada a él en la forma del trabajo efectuado por las fuerzas las que lo ponen en movimiento.

Si T es la energía cinética del sistema y si se convierte en $T + \delta T$, a causa de la acción de un impulso infinitesimal cuyas componentes son δp_1, δp_2, etc., el incremento δT debe ser la suma de las cantidades de trabajo hecho por las componentes del impulso, o en símbolos,

$$\delta T = \dot{q}_1 \delta \ p_1 + \dot{q}_2 \delta \ p_2 + \text{etc.}$$
$$= \Sigma \ (\dot{q} \delta p). \qquad \ldots (1)$$

El estado instantáneo del sistema es definido completamente si las variables y los momenta son dados. Por tanto, la energía cinética, que depende del estado instantáneo del sistema puede ser expresada en términos de las variables (q) y de los momenta (p). Este es el modo de expresar T, introducido por Hamilton. Cuando T se expresa en esta forma, la distinguiremos por el subíndice p así, T_p.

La variación completa de Tp es

$$\delta Tp = \Sigma \left(\frac{\partial Tp}{\partial p} \delta p \right) + \Sigma \left(\frac{\partial Tp}{\partial q} \delta q \right) \quad \ldots (2)$$

El último término puede escribirse

$$\Sigma \left(\frac{\partial Tp}{\partial q} \dot{q} \delta t \right),$$

el cual disminuye con δt y finalmente se desvanece (comparado con el primer término) cuando el impulso llega a ser instantáneo.

Por tanto, igualando los coeficientes de δp en las ecuaciones (1) y (2), obtenemos

$$\dot{q} = \frac{\partial Tp}{\partial p} \quad \ldots (3)$$

o sea, *la velocidad correspondiente a la variable q es el coeficiente diferencial de Tp con respecto al correspondiente momentum p.*

Hemos llegado a este resultado por la consideración de fuerzas impulsivas. Con este método hemos evitado la consideración del cambio de configuración durante la acción de las fuerzas. Pero el estado instantáneo del sistema es en todos aspectos el mismo, ya sea que el sistema haya sido llevado de un estado de reposo al estado dado de movimiento por la aplicación transitoria de fuerzas impulsivas, o que llegara a ese estado en una forma gradual.

En otras palabras, las variables y correspondientes velocidades y momenta, dependen del estado real de movimiento del sistema en el instante dado y no de su historia previa.

Por tanto, la ecuación (3) es igualmente válida, ya sea que el estado de movimiento del sistema se suponga debido a fuerzas impulsivas, o a fuerzas que actúan en cualquiera otra forma.

Por consiguiente, ahora podemos descartar la consideración de fuerzas impulsivas, junto con las limitaciones impuestas a su tiempo de acción, y a los cambios de configuración durante su acción.

158. Ecuaciones de Movimiento de Hamilton

Ya hemos mostrado que

$$\frac{\partial Tp}{\partial p} = \dot{q} \quad \ldots (4)$$

Sea que el sistema se mueve de modo arbitrario, sujeto a las condiciones impuestas por sus conexiones; entonces las variaciones de p y q son

$$\delta p = \frac{dp}{dt} \delta t, \quad \delta q = \dot{q} dt \quad \ldots (5)$$

Por tanto $$\frac{\partial Tp}{\partial p} \delta p = \frac{dp}{dt} \dot{q} \delta t$$

$$= \frac{dp}{dt} \delta q \quad \ldots (6)$$

y la variación completa de Tp es

$$\delta Tp = \Sigma\left(\frac{\partial Tp}{\partial p}\,\delta p + \frac{\partial Tp}{\partial q}\,\delta q \right)$$

$$= \Sigma\left\{\left(\frac{dp}{dt} + \frac{\partial Tp}{\partial q} \right)\delta q \right\} \quad \ldots (7)$$

Pero el incremento de la energía cinética surge del trabajo efectuado por las fuerzas impresas, o

$$\delta Tp = \Sigma\,(F\delta q) \qquad \ldots (8)$$

En estas dos expresiones las variaciones δq son totalmente independientes entre sí, por lo que estamos autorizados a igualar los coeficientes de cada una de ellas en las dos expresiones (7) y (8). Obtenemos así

$$Fr = \frac{dpr}{dt} + \frac{\partial Tp}{\partial qr} \qquad \ldots (9)$$

donde el momentum Pr y la fuerza Fr, pertenecen a la variable qr.

Existen tantas ecuaciones de esta forma como variables haya. Estas ecuaciones fueron dadas por Hamilton. Ellas muestran que la fuerza correspondiente a cualquier variable es la suma de dos partes. La primera parte es la razón de incremento del momentum de esa variable con respecto al tiempo. La segunda parte es la razón de incremento de la energía cinética por unidad de incremento de la variable, siendo constantes las otras variables y todos los momenta.

159. La energía cinética expresada en función de los momenta y velocidades (T$p\dot{q}$).

Sean p_1, p_2, etc., los momenta, y q_1, q_2, etc., las velocidades en un instante dado y sean p_1, p_2, etc., $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, etc., otro sistema de momenta y velocidades, tales que

$$P_1 = np_1, \quad \dot{q}_1 = n\dot{q}_1, \quad \text{etc.} \qquad \ldots (10)$$

Es manifiesto que los sistemas p, $\dot{q}$ serán congruentes entre sí si los sistemas p, $\dot{q}$ lo son.

Ahora sea que n varía en δn. El trabajo hecho por la fuerza F_1 es (por art. 156).

$$F_1\delta q_1 = \dot{q}_1\delta P_1 = \dot{q}_1 P_1 n\delta n \qquad \ldots (11)$$

Sea que n aumenta de 0 a 1; entonces el sistema es llevado de un estado de reposo al estado de movimiento ($\dot{q}p$), y el trabajo total gastado al producir este movimiento es

$$(\dot{q}_1 P_1 + \dot{q}_2 P_2 + \text{etc.})\int_0^1 ndn \qquad \ldots (12)$$

Pero $$\int_0^1 ndn = \frac{1}{2},$$

y el trabajo gastado al producir el movimiento es equivalente a la energía cinética. Por tanto

$$\mathrm{T}p\dot{q} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{P}_1\dot{q}_1 + \mathrm{P}_2\dot{q}_2 + \text{etc.} \right) \qquad \dots (13),$$

donde $\mathrm{T}p\dot{q}$ denota la energía cinética expresada en términos de los momenta y velocidades. Las variables q_1, q_2, etc., no entran en esta expresión.

La energía cinética es, por consiguiente, la semisuma de los productos de los momenta por sus correspondientes velocidades.

Cuando la energía cinética sea expresada de este modo la denotaremos por el símbolo $\mathrm{T}p\dot{q}$. Es una función de los momenta y velocidades solamente y no involucra a las variables mismas.

160. Energía cinética en función de velocidades ($\mathrm{T}\dot{q}$).

Hay un tercer método para expresar la energía cinética, el cual es considerado generalmente, por supuesto, como el fundamental. Resolviendo las ecuaciones (3) podemos expresar los momenta en términos de las velocidades y entonces, introduciendo estos valores en (13), tendremos una expresión para T que involucra solamente las velocidades y las variables. Cuando T es expresada en esta forma lo indicaremos así con el símbolo $\mathrm{T}\dot{q}$. Esta es la forma en que la energía cinética está expresada en las ecuaciones de Lagrange.

161. Relaciones entre $\mathrm{T}p$ y $\mathrm{T}\dot{q}$, P y $\dot{q}$

Es manifiesto que, puesto que $\mathrm{T}p$, $\mathrm{T}\dot{q}$ y $\mathrm{T}p\dot{q}$, son tres diferentes expresiones de la misma cosa,

$$\mathrm{T}p + \mathrm{T}\dot{q} - 2\mathrm{T}p\dot{q} = \mathrm{O},$$

ó $$\mathrm{T}p + \mathrm{T}\dot{q} - \mathrm{P}_1\dot{q}_1 - \mathrm{P}_2\dot{q}_2 - \text{etc.} = \mathrm{O} \qquad \dots (14)$$

Por tanto, si todas las cantidades p, q, y $\dot{q}$ varían,

$$\left(\frac{\partial \mathrm{T}p}{\partial P_1} - \dot{q}_1\right)\delta P_1 + \left(\frac{\partial \mathrm{T}p}{\partial P_2} - \dot{q}_2\right)\delta P_2 + \text{etc.}$$
$$+ \left(\frac{\partial \mathrm{T}\dot{q}}{\partial q_1} - P_1\right)\delta\dot{q}_1 + \left(\frac{\partial \mathrm{T}\dot{q}}{\partial q_2} - P_2\right)\delta\dot{q}_2 + \text{etc.}$$
$$+ \left(\frac{\partial \mathrm{T}p}{\partial q_1} + \frac{\partial \mathrm{T}\dot{q}}{\partial q_1}\right)\delta q_1 + \left(\frac{\partial \mathrm{T}p}{\partial q_2} + \frac{\partial \mathrm{T}\dot{q}}{\partial q_2}\right)\delta q_2 + \text{etc.} =$$
$$= \mathrm{O} \qquad \dots (15)$$

Las variaciones δp no son independientes de las variaciones δq y $\delta\dot{q}$, por lo que no podemos afirmar de inmediato que el coeficiente de cada variación en esta ecuación es cero. Pero sabemos, según las ecuaciones (3), que

$$\frac{\partial \mathrm{T}p}{\partial p_1} - \dot{q}_1 = \mathrm{O}, \text{ etc.} \qquad \dots (16),$$

por lo que los términos que involucran a las variaciones δp se desvanecen por sí mismos.

Las variaciones restantes $\delta\dot{q}$ y δq son ahora del todo independientes, por lo que encontramos, igualando a cero, los coeficientes de $\delta\dot{q}_1$, etc.,

$$P_1 = \frac{\partial T\dot{q}}{\partial \dot{q}_1}, \quad P_2 = \frac{\partial T\dot{q}}{\partial q_2}, \text{ etc.} \qquad \ldots (17),$$

o sea, las *componentes del momentum son los coeficientes diferenciales de $T\dot{q}$ con respecto a las velocidades correspondientes.*

Asimismo, igualando a cero los coeficientes de δq_1, etc.,

$$\frac{\partial Tp}{\partial q_1} + \frac{\partial T\dot{q}}{\partial q_1} = O \qquad \ldots (18)$$

o sea, *el coeficiente diferencial de la energía cinética con respecto a cualquier variable q_1 es igual en magnitud pero de signo opuesto cuando T se expresa como una función de las velocidades en vez de como una función de los momenta.*

En virtud de la ecuación (18) podemos escribir la ecuación de movimiento (9)

$$F_1 = \frac{dp_1}{dt} - \frac{\partial T\dot{q}}{\partial q_1} \qquad \ldots (19)$$

ó

$$F_1 = \frac{d}{dt}\frac{\partial T\dot{q}}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T\dot{q}}{\partial q_1} \qquad \ldots (20)$$

que es la forma en la cual las ecuaciones de movimiento fueron dadas por Lagrange.

162. Momenta y productos de Inercia y de movilidad.

En la anterior investigación hemos evitado la consideración de la forma de la función que expresa la energía cinética en términos ya sea de las velocidades o de los momenta. La única forma explícita que le hemos asignado es

$$Tp\dot{q} = \frac{1}{2}\left(P_1\dot{q}_1 + P_2\dot{q}_2 + \text{etc.}\right) \qquad \ldots (21)$$

en la cual es expresada como la semisuma de los productos de los momenta cada uno por su correspondiente velocidad.

Podemos expresar las velocidades en términos de los coeficientes diferenciales de Tp con respecto a los momenta, como en la ecuación (3), así

$$Tp = \frac{1}{2}\left(P_1\frac{\partial Tp}{\partial p_1} + P_2\frac{\partial Tp}{\partial p_2} + \text{etc.}\right) \ldots (22)$$

Esto muestra que Tp es una función homogénea de segundo grado de los momenta p_1, p_2, etc.

Podemos también expresar los momenta, en términos de $T\dot{q}$, y encontramos

$$T\dot{q} = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1 \frac{\partial T\dot{q}}{\partial \dot{q}_1} + \dot{q}_2 \frac{\partial Tq}{\partial q_2} + \text{etc.}\right) \quad \ldots (23)$$

la cual muestra que $T\dot{q}$ es una función homogénea de segundo grado con respecto a las velocidades $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, etc.

Si escribimos

$$P_{11} \text{ por } \frac{\partial^2 T\dot{q}}{\partial \dot{q}_1^2}, \qquad P_{12} \text{ por } \frac{\partial^2 T\dot{q}}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_2}, \text{ etc.}$$

$$\text{y } Q_{11} \text{ por } \frac{\partial^2 Tp}{\partial p_1^2}, \qquad Q_{12} \text{ por } \frac{\partial^2 Tp}{\partial p_1 \partial p_2}, \text{ etc.;}$$

entonces, puesto que tanto $T\dot{q}$ como Tp son funciones de segundo grado de $\dot{q}$ y de p respectivamente, tanto las P como las Q serán funciones de las variables q solamente, e independientes de las velocidades y los momenta. Obtenemos así las expresiones para T,

$$2T\dot{q} = P_{11}\,\dot{q}_1^2 + P_{12}\,\dot{q}_1\,\dot{q}_2 + \text{etc.} \quad \ldots (24)$$

$$2TP = Q_{11}\,p_1^2 + 2Q_{12}\,p_1\,p_2 \quad \ldots (25)$$

Los momenta son expresados en términos de las velocidades por las ecuaciones lineales

$$p_1 = P_{11}\,\dot{q}_1 + P_{12}\,\dot{q}_2 + \text{etc.} \quad \ldots (26)$$

y las velocidades son expresadas en términos de los momenta por las ecuaciones lineales

$$\dot{q}_1 = Q_{11}\,p_1 + Q_{12}\,p_2 + \text{etc.} \quad \ldots (27)$$

En tratados sobre la dinámica de un cuerpo rígido, los coeficientes correspondientes a P_{11}, en que los subíndices son los mismos, se llaman Momentos de Inercia, y los que corresponden a P_{12}, en que los subíndices son diferentes, se llaman Productos de Inercia. Podemos extender estos nombres al problema más general que ahora está ante nosotros, en que estas cantidades no son, como en el caso de un cuerpo rígido, constantes absolutas, sino son funciones de las variables q_1, q_2, ect.

De manera semejante podemos llamar a los coeficientes de la forma Q_{11} Momentos de Movilidad y a los de la forma Q_{12}, Productos de Movilidad. No será frecuente, sin embargo, que tengamos ocasión de hablar de los coeficientes de movilidad.

163. Condiciones necesarias a las cuales deben satisfacer estos coeficientes

La energía cinética del sistema es una cantidad esencialmente positiva o cero. Por tanto, ya sea que

se exprese en términos de las velocidades o en términos de los momenta, los coeficientes deben ser tales que ningunos valores reales de las variables puedan hacer a T negativa.

Existe así un conjunto de condiciones necesarias que deben satisfacer los valores de los coeficientes *P*. Estas condiciones son:

Las cantidades P_{11}, P_{22} etc., deben ser todas positivas.

Los *n*-1 determinantes formados en sucesión a partir del determinante

$$\begin{vmatrix} P_{11}, & P_{12}, & P_{13}, & \ldots, & P_{1n} \\ P_{12}, & P_{22}, & P_{23}, & \ldots, & P_{2n} \\ P_{13}, & P_{23}, & P_{33}, & \ldots, & P_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{1n}, & P_{2n}, & P_{3n}, & \ldots, & P_{nn} \end{vmatrix}$$

por la omisión de términos con subíndice 1, después de los términos ya sea con 1 o 2 en su subíndice, y así sucesivamente, deben ser todos positivos.

El número de condiciones para *n* variables es, por cosiguiente, 2 *n*-1.

Los coeficientes Q están sujetos a condiciones de la misma clase.

164. Relación entre las ideas matemáticas dinámicas y eléctricas

En este esquema de los principios fundamentales de la dinámica de un sistema conectado, hemos ignorado el mecanismo mediante el cual están conectadas las partes del sistema. Ni siquiera hemos escrito un conjunto de ecuaciones para indicar cómo el movimiento de cualquier parte del sistema depende de la variación de las variables. Hemos limitado nuestra atención a las variables, sus velocidades y momenta y las fuerzas que actúan sobre las piezas que representan las variables. Nuestras únicas hipótesis son: que las conexiones del sistema son tales que el tiempo no está explícitamente contenido en las ecuaciones de condición y que el principio de la conservación de la energía es aplicable al sistema.

Tal descripción de los métodos de la dinámica pura no es innecesario, porque Lagrange y la mayoría de sus discípulos, con quienes estamos en deuda por estos métodos, en general se han limitado a sí mismos a una demostración de ellos, y, a fin de dedicar su atención a los símbolos ante ellos, se han esforzado por desterrar toda idea que no sea la de cantidad pura, a modo de no solamente hacer caso omiso de diagramas, sino hasta desembarazarse de las ideas de velocidad, momenta y energía, después que éstas han sido sustituidas de una vez por todas por símbolos en las ecuaciones originales. Para podernos referir a los resultados de este análisis en lenguaje dinámico ordinario, nos hemos esforzado por retraducir las principales ecuaciones del método a un lenguaje que pueda ser inteligible sin el uso de símbolos.

Como el desarrollo de las ideas y métodos de las matemáticas puras ha hecho posible, al formar una

teoría matemática de la dinámica, sacar a la luz muchas verdades que no habrían podido ser descubiertas sin adiestramiento matemático, así, si vamos a formar teorías dinámicas de otras ciencias, debemos tener nuestras mentes imbuidas con estas verdades dinámicas tanto como con métodos matemáticos.

Al formar las ideas y palabras relativas a cualquier ciencia, que, como la electricidad, trata con fuerzas y sus efectos, debemos mantener sin cesar en mente las ideas apropiadas a la ciencia fundamental de la dinámica, de modo que podamos, durante el primer desarrollo de la ciencia, evitar inconsistencia con lo que ya se ha establecido y también que cuando nuestros conceptos lleguen a ser más claros, el lenguaje que hemos adoptado pueda ser una ayuda para nosotros y no un estorbo.

El libro *Materia y Movimiento*, del autor James Clerk Maxwell, se terminó de imprimir el 21 de Marzo de 1998, por Editora Hoy en Tampico, S.A. de C.V., Altamira # 611 Poniente, zona centro, Tampico, Tamaulipas. La edición fue de 3,000 ejemplares más sobrantes para reposición y estuvo al cuidado del Dr. Fernando Aldape Barrera.